

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

**Морозова О.А.**

*студентка,*

*Національний технічний університет України*

*«Київський політехнічний інститут»*

### **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТА-ЕВРИСТИКИ GOLDEN BALL ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА НА ГРАФАХ**

Важливими оптимізаційними задачами на графах є задачі побудови мінімальних остових дерев. Ці задачі мають широкий спектр застосування – для побудови транспортних мереж, розв'язання економічних задач. В останні роки видно вплив потреб нових областей теорії ігор, програмування, теорії передачі повідомлень, електричних ланцюгів а також проблем психології та біології.

До цієї категорії належить і задача Штейнера. Задача, поставлена Якобом Штейнером полягає у необхідності з'єднати  $N$  точок площини ламаними лініями таким чином, щоб кожна точка була з'єднана з кожною і сумарна довжина проведених ліній була мінімальна.

Задача має практичне застосування при побудові комп'ютерних мереж та конструюванні інтегральних електросхем. Більш коротка мережа потребує менше часу зарядки-розрядки та тим самим збільшує швидкодію схеми.

Існує багато інтерпритацій цієї задачі. Зупинимось на такій постановці: знайти у зваженому графі дерево найменшої ваги, що охоплює обрану підмножину вершин. В залежності від вимог мінімізації ваги дерева інші вершини можуть як стягуватися деревом, так і ні. Задача Штейнера за умови стягування додаткових вершин належить до класу NP. Для вирішення цих задач частіше за все використовуються евристичні методи, псевдополіноміальні алгоритми, метод локальних покращень, гілок та мереж та метод випадкового пошуку. Найбільш популярні програмні реалізації використовують алгоритм Крускала та генетичні алгоритми з попередньо відібраною популяцією.

Одним з нових методів вирішення задач комбінаторних оптимізації є алгоритм Golden Ball. Це евристичний алгоритм, тобто цей алгоритм допомагає знайти рішення наближене до найкращого.

«Golden Ball» (далі GB) розроблена у 2014 Особою, Діазом та Онісевою в Іспанії. GB заснована на множинних популяціях та базується на поняттях футболу. Можливі розв'язки задачі у цій мета-евристиці представлені гравцями у футбольних командах (популяціях). Під час роботи алгоритму команди тренуються, обмінюються гравцями і тренерами (методами тренувань), проводять матчі, заробляючи очки в чемпіонаті, за допомогою чого з кожним сезоном рішення задачі (гравці) стають все кращими, поки не буде знайдено оптимальний розв'язок.

GB починає свою роботу зі створення початкової популяції і розділення рішень (що називаються гравцями) на субпопуляції (так звані команди) системи. Після того, як ця початкова фаза була завершена, починається перший сезон. Сезон ділиться на тижні, в які команди тренуються і стикаються одна з одною, приймаючи участь у чемпіонаті. Коли закінчується сезон, починається фаза трансферів, в якій гравці і тренери можуть

змінити команду. Цей процес повторюється до тих пір, поки критерій припинення не буде виконано.

Фаза ініціалізації включає в себе створення гравців (рішень) і команд, а також оцінку потужності кожної команди. Першим кроком є створення набору рішень, що називається  $P$ , який складе вихідну популяцію. Усі рішення створюються випадково і називаються гравцями. Після генерації  $P$  гравці випадковим чином розподіляються між різними командами. Якість кожного гравця  $rij$  представлена дійсним числом  $qij$ . Це число визначається функцією вартості  $f(rij)$ , яка залежить від задачі. Чим краще гравці, тим сильніше команда. Таким чином, якщо одна команда сильна, вона може виграти більше ігор і знаходитися на кращій позиції в рейтингу чемпіонату.

За фазою ініціалізації слідує фаза змагання. У цій центральній фазі алгоритму команди тренуються самостійно та нарощують свої сили маленькими кроками. Тим часом команди зустрічаються одна з одною, створюючи змагання чемпіонату, що допомагає вирішити питання трансферу гравців між різними командами. Цей процес поділяється на так звані сезони. Сезон також має стільки матчів, скільки треба для завершення простого чемпіонату, в якому всі команди зустрічаються одна з одною двічі. З цієї причини кожний сезон поділяється на дві частини рівної тривалості. У цих частинах всі команди мають зустріти одна одну один раз. В кінці сезону відбуваються трансфери гравців між командами. Нарешті, сезон містить стільки фаз тренування, скільки й турів.

Тренувальна фаза – це фаза, в якій всі гравці кожної команди проходять через тренування, що змушує їх покращити свої результати. Для оволодіння цією ситуацією за запропонованою методикою кожна команда має специфічний метод тренувань, а саме функцію визначення наступників, яка працює на певній структурі близьких рішень із простору рішень. Метод тренувань присвоюється випадковим чином при процесі ініціалізації. Для кожного тренування ця функція застосовується певну кількість разів (поки не досягається її критерій завершення). Тренування закінчується, коли після певної кількості застосувань функції визначення наступників не відбувається поліпшення тренуваного гравця  $\epsilon$  також інший тип тренувань – який було названо спеціалізованим тренуванням. Може статися, що гравець  $rij$ , хоча і брав участь у загальному тренуванні, не зміг жодним чином підвищити показник якості. З точки зору оптимізації це відбувається, коли показник якості гравця знаходиться в локальному оптимумі. Щоб змусити подолати цю перешкоду, в даній мета-евристиці створено концепцію спеціалізованого тренування. Завдяки цим тренуванням  $rij$  може врятуватися з локального оптимуму та рухатися в просторі рішень до іншої області або точки, яка може бути перспективнішою. Матчі, як і в реальному світі, відбуваються між двома командами. Кожен матч складається з можливостей гравців у командах. Кожна можливість реалізується через гол в турнірі між гравцями для кожної команди. Гравець із вищим показником якості забиває гол на користь своєї команди. Команда, яка забиває більше голів, стає переможцем матчу. Період трансферів – це процес обміну гравців між командами. Таким чином всі команди намагаються зміцнити себе, придбавши нових гравців. Необхідно мати на увазі, що чим краще позиція команди в рейтингу, тим кращих нових гравців вона дістає. Тобто краща команда отримує кращого гравця гіршої (останньої) команди. З іншого боку, команда, наступна за найкращою, отримує наступного за кращим гравця передостанньої команди. Крім того, якщо кількість команд є непарним числом, команда в центрі списку не обмінює жодних гравців. В кожному періоді трансферів всі команди з нижньої половини рейтингу змінюють свій метод тренувань, залучаючи іншого тренера в надії, що він підвищить продуктивність команди в пошуку кращих результатів. Зміна методу тренувань відбувається випадковим чином серед всіх можливих методів, які існують у системі, що дозволяє

повторення між різними командами. Така випадкова зміна околиці, що впливає на всіх гравців команди, підвищує дослідну потужність методики.

Після закінчення чергового сезону перевіряється критерій закінчення алгоритму, який полягає в незбільшенні в порівнянні з попереднім сезоном таких величин: 1) суми «сил» всіх команд; 2) суми показника якості капітанів команд (найкращих гравців); 3) найліпшого розв'язку в системі.

Описаний алгоритм до поставленої задачі було застосовано наступним чином. Гравцям (розв'язкам) відповідають набори відрізків між містами. Мінімізуємо функцію сумарних відстаней між вершинами. Початковий розв'язок формується наступним чином – випадково обираємо точку серед тих, що потрібно зеднати. Проводимо з неї відрізки у всі інші вершини (з групи вершин що необхідно з'єднати). Отриманий список ребер буде являти собою гравця. Випадковим чином розподіляємо гравців на команди.

Фаза тренування проводиться наступним чином. Розв'язок (гравець) має набір відрізків. Беремо з нього випадковим чином один і при необхідності (коли не всі точки пов'язані між собою) додаємо відрізки до тих пір, доки рішення не буде допустимим (доки система відрізків не стане зв'язною). Додаємо відрізки для точок, що не пов'язані ні з якими іншими, або пов'язані між собою, але не з іншими точками групи. З'єднаємо їх з точками додаткової групи, а точку додаткової групи з випадковою обов'язковою для з'єднання.

Оцінка трудомісткості алгоритму  $GB-O(n)$ , тобто час його виконання є прийнятним. Це підтвердили і експерименти з програмною реалізацією: для задач розмірності до 10 точок включно розв'язання триває не більше ніж декілька секунд. При експериментуванні ми використали наступні параметри: кількість команд  $m = 6$ , кількість гравців у команді  $k = 14$ .

Згенерувавши випадкові вхідні дані для задач невеликої розмірності і провівши 50 прогонів програми, отримали оптимальний розв'язок у 85 % випадків (перевірили програмною реалізацією повного перебору). А для решти прогонів ми отримали одне й те саме значення середнього запізнення, що відрізняється від оптимуму приблизно на 2 %. Таким чином, застосування мета-евристики «Golden Ball» – гідний підхід до розв'язання задачі Штейнера на графах.

#### Список використаних джерел:

1. Осаба Е. Golden Ball : нова мета-евристика розв'язання задач комбінаторної оптимізації, заснована на поняттях футболу [Текст] / Е. Осаба, Ф. Діаз, Е. Онієва // Springer Science + Business Media. – New York, Springer, 2014. – 19 с.

2. А.О. Іванов, А.А. Тужилин Задача Штейнера на площині чи пласкі мінімальні мережі // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 12. – С. 1813–1844.