МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

Курінна Д.В., Курінна В.В.
студенти;
Рудянова Т.М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Університет митної справи та фінансів

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР В СІЛЬСЬКОМУ ГОСПОДАРСТВІ

При розв'язанні деяких економічних задач доводиться розглядати ситуації, в яких відбувається зіткнення інтересів двох, трьох або й більше конкуруючих учасників, у кожного з яких є відмінні, неоднакові цілі. Це щонайбільше є типовим в умовах ринкової економіки. Подібного походження ситуації мають назву конфліктні. В моделюванні конфліктні ситуації називають теорією ігор. В індустріальних виробництвах теорію ігор можна використовувати при виборі щонайкращих, оптимальних рішень, приміром, при виготовленні раціональних резервів матеріалів, продуктів, напівфабрикатів, сировини, коли протистоять дві сторони: збільшення резервів, що забезпечує постійну невпинну роботу підприємства і зменшення резервів з ціллю скорочення затрат на зберігання.

Теорія ігор також може використовуватися при рішенні економічних задач в сільському господарстві. Наприклад, селянин, який має обмежену ділянку землі, може засадити її трьома неоднаковими сортами рослин A_1, A_2, A_3. Урожай цих трьох видів рослин напряму залежить від погодних умов (тобто природи). В свою чергу погода може перебувати в трьох відмінних становищах: B_1, B_2, B_3. Власник земельної ділянки має відомості (статистичні дані) про середню врожайність рослин в трьох відмінних станах погоди, що відображена в таблиці 1. Кожен елемент в даній таблиці відповідає тому, скільки центнерів плодів отримає селянин з гектара землі лише тоді, коли буде відповідний стан природи, C_i – ринкова ціна одного центнера культури A_i.

Таблиця 1

Сорти рослин	Можливі стани погоди			Ціни
	Посуха B_1	Нормальна B_2	Дощова B_3	C
A_1	20	5	15	2
A_2	7,5	12,5	5	4
A_3	0	7,5	10	8

Потрібно визначити співвідношення, в яких селянин має засіяти наявну ділянку землі, щоб незалежно від погодних умов, максимізувати свій дохід.

Матриця P, що характеризує можливі доходи, які може одержати власник землі від продажу кожної з видів рослин плодів при різному стані погоди, має вигляд. $P = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \\ 30 & 50 & 20 \\ 0 & 60 & 80 \end{pmatrix}$ Задача приведена до антагоністичної гри: першим гравцем є селянин, а другим – природа.

В даній ситуації селянин має в своєму розпорядженні три чистих стратегії: чиста стратегія α_1 відповідає тому, що дана ділянка землі буде засаджена рослинами виду A_1; чиста стратегія α_2 відповідає тому, що дана ділянка землі буде засаджена рослинами виду A_2; чиста стратегія α_3 відповідає тому, що дана ділянка землі буде засаджена рослинами виду A_3. Природа також може застосовувати свої три припустимі стратегії: чиста стратегія β_1 відповідає тому, що буде посушлива погода B_1; чиста стратегія β_2 відповідає тому, що буде посушлива погода B_2; чиста стратегія β_3 відповідає тому, що буде посушлива погода B_3.

Проаналізуємо матрицю гри P. Подивимось чи є у нашої гри сідлова точка. Віднайдемо верхню і нижню ціну гри: $\max_i \min_j h_{ij} = 20$, $\min_j \max_i h_{ij} = 40$. В результаті гри, ціна нижня не рівняється верхній ціні, тому це значить, що остання гра антагоністична й вона не має сідлової точки. Рішення цієї гри варто розшукувати в змішаних стратегіях, а це означає що один гравець, селянин, користується своєю оптимальною змішаною стратегією, інший, природа, користується неухильно своїми чистими стратегіями, а математичне очікування прибутку, який селянин одержить з власної ділянки, становитиме не менше ціни гри. Отже, виконується подальша система нерівностей: $\begin{cases} 40p_1 + 30p_2 \geq V, \\ 10p_1 + 50p_2 + 60p_3 \geq V, \\ 30p_1p_1^* + 20p_2 + 80p_3 \geq V. \end{cases}$ Виконаємо подальшу трансформацію для нашої системи нерівностей. Поділимо (p_1, p_2, p_3) на V і залучимо нові змінні: $y_1 = \frac{p_1}{V}; y_2 = \frac{p_2}{V}; y_3 = \frac{p_3}{V}$.

Система прийме такий вигляд: $\begin{cases} 40y_1 + 30y_2 \geq 1, \\ 10y_1 + 50y_2 + 60y_3 \geq 1, \\ 30y_1 + 20y_2 + 80y_3 \geq 1. \end{cases}$

Поділивши рівність $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ на V, одержимо, що перемінні y_1, y_2, y_3 задовольняють умові $y_1, y_2, y_3 = 1/V$.

Так як ціллю першого гравця є максимізація його прибутку, а математичне очікування його виграшу становить не менше ціни гри, то селянин бажатиме максимізувати ціну гри, що в свою чергу, тотожно мінімізації величини $1/V$. Зі сказаного випливає, що задача для першого гравця може бути сформульована таким чином: визначити вектор $Y = (y_1, y_2, y_3)$, компоненти якого задовольняли б системі обмежень:

$$\begin{cases} 40y_1 + 30y_2 \geq 1, \\ 10y_1 + 50y_2 + 60y_3 \geq 1, \\ 30y_1 + 20y_2 + 80y_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0,$$

а цільова функція Z прагнула б до мінімуму: $Z = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$

Отже, щоб найти оптимальну, тобто найкращу змішану стратегію першого гравця, необхідно розв'язати представлену вище задачу лінійного програмування.

Якщо другий гравець, природа, використовуватиме свою найліпшу змішану стратегію Q^*, а перший, селянин,- неухильно використовуватиме свої чисті стратегії, то математичне очікування програшу другого гравця становитиме не більше ціни гри. Тому зобов'язана втілюватися подальша система нерівностей:

$$\begin{cases} 40q_1 + 10q_2 + 30q_3 \leq V, \\ 30q_1 + 50q_2 + 20q_3 \leq V, \\ 60q_2 + 80q_3 \leq V. \end{cases}$$

Поділимо (q_1, q_2, q_3)на V і введемо нові змінні $x_1 = \dfrac{q_1}{V}; x_2 = \dfrac{q_2}{V}; x_3 = \dfrac{q_3}{V}$.

Система прийме вигляд: $\begin{cases} 40x_1 + 10x_2 + 30x_3 \leq 1, \\ 30x_1 + 50x_2 + 20x_3 \leq 1, \\ 60x_2 + 80x_3 \leq 1. \end{cases}$

Поділивши рівність $p_1^* + q_2^* + q_3^* = 1$на V, одержимо, що змінні $x_1 + x_2 + x_3$ задовольняють умові $x_1 + x_2 + x_3 = 1/V$.

Оскільки метою першого гравця є мінімізація його виграшу, а математичне очікування його програшу не більше ціни гри, то другий гравець прагнутиме мінімізувати ціну гри, яка, в свою чергу, тотожна максимізації величини $1/V$. Зі сказаного випливає, що для другого гравця завдання може бути сформульована таким чином: визначити вектор $X = (x_1, x_2, x_3)$, компоненти якого задовольняли б системі обмежень:

$$\begin{cases} 40x_1 + 10x_2 + 30x_3 \leq 1, \\ 30x_1 + 50x_2 + 20x_3 \leq 1, \\ 60x_2 + 80x_3 \leq 1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

а цільова функція F прагнула б до максимуму: $F = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$.

Отже, для того щоб найти оптимальну змішану стратегію другого гравця, потрібно розв'язати задачу лінійного програмування.

Розв'язуючи ці задачі (в крайній мірі, одну з них) симплекс-методом, знайдемо оптимальні стратегії першого та другого гравців і ціну гри.

Оптимальним вирішенням задачі мінімізації буде вектор $Y^* = \left(y_1^* = \frac{22}{1420}; y_2^* = \frac{18}{1420}; y_3^* = \frac{5}{1420} \right)$.

Зі співвідношення $y_1 + y_2 + y_3 = 1/V$ знайдемо V: $V = \frac{1}{y_1^* + y_2^* + y_3^*} = \frac{1420}{45}$

Зі співвідношень $y_1^* = \frac{p_1}{V}; y_2^* = \frac{p_2}{V}; y_3^* = \frac{p_3}{V}$ знайдемо:

$$p_1^* = y_1^* V = \frac{22}{45} \cdot \frac{45}{1420} = \frac{22}{1420},\ p_2^* = y_2^* V = \frac{18}{45} \cdot \frac{45}{1420} = \frac{18}{1420},$$

$$p_3^* = y_3^* V = \frac{5}{45} \cdot \frac{45}{1420} = \frac{5}{1420}$$

Отже $P^* = \left(p_1^* = \frac{22}{45}; p_2^* = \frac{18}{45}; p_3^* = \frac{5}{45} \right)$

Оптимальним вирішенням задачі максимізації буде вектор:

$X^* = \left(x_1^* = \frac{25}{1420}; x_2^* = \frac{9}{1420}; x_3^* = \frac{11}{1420} \right)$, тоді $q_1^* = x_1^* V = \frac{25}{1420} \cdot \frac{1420}{45} = \frac{25}{45}$,

$$q_2^* = x_2^* V = \frac{9}{1420} \cdot \frac{1420}{45} = \frac{9}{45},\ q_3^* = x_3^* V = \frac{11}{1420} \cdot \frac{1420}{45} = \frac{11}{45}.$$

Отже $Q^* = \left(q_1^* = \frac{25}{45}; q_2^* = \frac{9}{45}; q_3^* = \frac{11}{45} \right)$.

Змішана стратегія власника земельної ділянки в даній ситуації може тлумачитися у виді фізичної суміші стратегій, що означає синхронне застосування гравцем своїх чистих стратегій в певних пропорціях, які задані компонентами вектора P^*, тобто в даному випадку селянин, попередньо розділивши свою ділянку на 45 рівних частин, засіє: 22/45 частини ділянки культурою A_1; 18/45 частини ділянки культурою A_2; 5/45 частини ділянки культурою A_3. При використанні своєї найкращої стратегії прибуток, який може одержати селянин зі своєї ділянки за будь-яких погодних умов, складатиме не менше 31,5 тис. грн. з 1 га.

Таким чином, застосування теорії ігор є досить ефективним інструментів для розгляду реальних конфліктних ситуацій сучасного життя. Отримувані в процесі теоретико-ігрового аналізу результати є чіткими, однозначними й адекватними реальності.

Список використаних джерел:

1. Нейман Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. – М. : Наука. – 1970. – 708 с.

2. Рудянова Т.М. Економіко-математичні методи та моделі (оптимізаційні методи та моделі): Навч.-метод. посібник для студентів економічних спеціальностей / Т.М. Рудянова. – Дніпропетровськ.: ДДФА, 2010. – 218 с.