Галкіна О.А.
здобувач,
Науковий керівник: **Крак Ю.В.**
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ВИКОРИСТАННЯ РОБАСТНОГО ПІДХОДУ У БАГАТОЕТАПНИХ ЗАДАЧАХ ПОРТФЕЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Практичні фінансові задачі оптимізації зазвичай мають дані, які є невизначеними і неточними у зв'язку з похибкою оцінювання. За останні роки ідея використання робастної оптимізації для вирішення таких невизначених параметрів стала дуже поширеною.

Робастна оптимізація являє собою новий підхід, який може вирішувати проблему помилок даних при розв'язанні задач оптимізації, а отриманий розв'язок гарантує певний рівень надійності по відношенню до невизначеності.

Концепція робастності в області фінансів розширює статистичні методи моделювання. Вона пропонує новий підхід до управління портфелем, розподілу активів та фінансового прогнозування. Інтуїтивно, робастність означає, що невеликі зміни у вибірці, або невеликі помилки у визначенні розподілу не впливають на описові параметри.

Задачі оптимізації портфеля мають за мету вивчити розподіл капіталу над активами з метою максимізації прибутку та мінімізації ризиків, використовуючи математичні інструменти.

Однак, незважаючи на фундаментальну теоретичну базу та ефективність розв'язання можливих задач, оптимальні портфелі чутливі до змін вхідних параметрів.

Робастна оптимізація запропонована для того, щоб знизити чутливість задач оптимізації портфеля.

Вчений Аарон Бен-Тал вивчав робастні постановки задач вибору багатоетапного портфеля для скінченних невизначених множин.

Розглянемо початковий портфель у вигляді $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, де x_i^0 – кількість акцій активу i; x_0^0 – готівка; $l = 1, ..., L$ – часовий горизонт; b_j^l – кількість активів, що купуються на початку періоду l; s_j^l – кількість активів, що продаються на початку періоду l; P_j^l – ціна акцій активу і за період L; α_i^l – транзакційні витрати продажу; β_i^l – транзакційні витрати купівлі.

Розглянемо рівняння балансу:

$$x_i^l = x_i^{l-1} - s_i^l + b_i^l;\ i = 1, ..., N;\ l = 1, ..., L$$

$$x_0^l \le x_0^{l-1} + \sum (1 - \alpha_i) P_i^l s_i^l - \sum (1 + \beta_i) P_i^l b_i^l;\ l = 1, ..., L$$

Припустимо, що усі майбутні ціни P_i^l відомі в момент розв'язання інвестиційної проблеми.

Можна отримати наступну детерміновану оптимізаційну проблему:

$$\max_{x,\, s,\, b,\, t} t$$

$$\begin{cases} t \le \sum\limits_{i=0}^{n} P_i^L x_i^L \\ x_i^l = x_i^{l-1} - s_i^l + b_i^l;\ i=1,\ldots,N;\ l=1,\ldots,L \\ x_0^l \le x_0^{l-1} + \sum(1-\alpha_i)P_i^l s_i^l - \sum(1+\beta_i)P_i^l b_i^l;\ l=1,\ldots,L \\ s_i^l \ge 0;\ i=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,L \\ b_i^l \ge 0;\ i=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,L' \\ x_i^l \ge 0;\ i=0,\ldots,n;\ l=1,\ldots,L. \end{cases}$$

Однак, в дійсності P_i^L не відомі і тому, не можуть розв'язувати проблему оптимальної алокації портфелю як лінійну програму, що представлена вище.

Розглянемо очікуване значення вектору $P' = \begin{bmatrix} P_1' \\ P_n' \end{bmatrix}$ з $\mu' = \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_n' \end{bmatrix}$ та її дисперсію V'.

Запишемо обмеження:

$$t \le \sum_{i=0}^{n} P_i^L x_i^L$$

$$x^L = (x_1^L, \ldots, x_n^L).$$

Очікуване значення та стандартне відхилення правої частини рівняння задано у наступному вигляді: $(\mu^L)^T x^L = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^L x_i^L$ та $\sqrt{(x^L)^T V^L x^L}$.

Якщо P_i^L нормально розподілені, вимагаючи, що:

$$t \le E(RHS) - 3STD(RHS) = (\mu^L)^T x^L - 3\sqrt{(x^L)^T V^L x^L},$$

тоді гарантовано, що нерівність $t \le \sum\limits_{i=0}^{n} P_i^L x_i^L$ буде задовольнятися у більш ніж 90% випадків.

Остання нерівність є робастною версією:

$$t \le \sum_{i=0}^{n} P_i^L x_i^L.$$

Для обмежень готівкового балансу ця ідея також працює.

Дана обмежена робастна модель відповідає вибору невизначених множин для P':

$$U' := \left\{ P' : \sqrt{\left((P' - \mu')^T \right)(V^l)^{-1}(P' - \mu') \right)} \leq 3 \right\},\ l = 1, \ldots, L.$$

Результуюча проблема може бути записана як конічна проблема другого порядку.

Список використаних джерел:

1. Zanjani M. K., Nourelfath M. and Ait–Kadi D. Multi-stage stochastic programming approach for production planning with uncertainty in the quality of raw materials and demand // CIRRELT, 2009.

2. Recchia R. and Scutella M. G. Robust portfolio asset allocation: models and algorithmic approaches. 2009. – P. 1-12.

Дундар О.Д.
аспірант,
Донецький національний університет

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАБЛИЖЕННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ РОЗВ'ЯЗКУ СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПОЛОГОЇ ІЗОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ

Дана робота присвячена розв'язанню стаціонарної задачі теплопровідності тонкостінної ізотропної оболонки за допомогою апроксимації функції температури поліномами Лежандра. В цій задачі оболонка знаходиться в тепловому контакті з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Рівняння теплопровідності для ізотропної оболонки в цьому випадку має наступний вигляд [2]:

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{\lambda} W_0, \qquad (1)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_1 + k_2)\frac{\partial}{\partial z},$$

де A, B – коефіцієнти першої квадратичної форми, k_1, k_2 – головні кривини серединної поверхні оболонки, W_0 – об'ємна густина джерел тепла, T – температура. Розглядались лише пологі оболонки, тому коефіцієнти першої квадратичної форми в декартовій системі координат дорівнюють одиниці $(A = B = 1)$ [3]. Розв'язок порядку N рівняння (1) будуємо, використовуючи відповідно до [2] наступні часткові суми:

$$T = \sum_{k=0}^{N} T_k P_k,\ T_k = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h} T P_k dz,$$

$$W_0 = \sum_{k=0}^{N} W_{0k} P_k,\ W_{0k} = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h} W_0 P_k dz,$$

де $2h$ – товщина оболонки, а P_k – полиноми Лежандра.

За допомогою переходу до безрозмірної системи координат з точністю до величини h та перетворень Фур'є було отримано розв'язок третього порядку