**Ников К.И.**
*студент,*
*Научный руководитель:* **Билозерова М.О.**
*кандидат физико-математических наук, доцент,*
*Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова*

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА

Актуальной задачей качественной теории дифференциальных уравнений является изучение существенно нелинейных дифференциальных уравнений. Среди работ в этой области, касающихся установления асимптотических представлений решений, большую часть составляют исследования уравнений со степенными нелинейностями. Одно из важных направлений таких исследований было порождено рассмотрением известного уравнения Эмдена-Фаулера, частные случаи которого применялись в ядерной физике, в газовой динамике, механике жидкости, релятивистской механике и других областях естествознания. Асимптотическое поведение решений этого уравнения детально описано в монографиях Р. Беллмана [1] и Дж. Сансоне [2].

С работы Ф. В. Аткинсона [3] было начато качественное исследование обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера

$$y'' = p(t)|y|^{\sigma} sign\, y,$$

где $\sigma \in (0, +\infty)$, а $p: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ – локально суммируемая функция. В упомянутой работе получен признак колеблемости всех правильных решений этого уравнения при $p\,(t) \neq 0$ и $\sigma > 1$. Методы исследования асимптотического поведения монотонных решений этого уравнения были разработаны в работах И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, М. М. Арипова, А. В. Костина, В. М. Евтухова и многих других авторов, причем этими исследованиями охватывались и случаи $\sigma < 1$.

Практических приложений для обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера известно очень много. Однако, в большинстве случаев наличие степенной нелинейности являлось следствием рассмотрения идеализированной модели некоторого реального процесса. С развитием вычислительной техники, появилась возможность строить более точные математические модели. В связи с этим возрос интерес к уравнениям с нелинейностями, отличными от степенных. Изучению асимптотического поведения решений таких уравнений было посвящено большое количество работ (см., например [4-6]), где удавалось получить лишь двусторонние асимптотические оценки для решений.

Через некоторое время в работах [7-9] была разработана методика установления асимптотики монотонных решений дифференциального уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – функция, в некотором смысле близкая к степенной, а также рассмотрены вопросы существования таких решений.

Естественным обобщением уравнений такого вида являются также часто появляющиеся на практике уравнения, содержащие в правой части производную неизвестной функции. Уравнениям именно такого вида посвящена настоящая работа.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p: ]a, \omega[\rightarrow ]0, +\infty[ \, (-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – непрерывная функция, $\varphi_i(z): \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[ \, (i = 0,1)$-правильно меняющиеся функции порядка $\sigma_i$, при $z \rightarrow Y_i(z \in \Delta_{Y_i})$. Тут $Y_i \in \{0, +\infty\}, \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[$ или $\Delta_{Y_i} = ]Y_i, y_i^0], \sigma_i \in \mathbb{R}, \sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ считаем, что

$y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

Решение $y: [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, [t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если

$$y^{(i)}: [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \; (i = 0,1), \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1) были подробно исследованы в работах М.А. Белозеровой [11-13].

При $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1) являются правильно меняющимися функциями порядка $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}$. Но, вообще говоря, не все правильно меняющиеся при $t \uparrow \omega$ решения уравнения (1) являются $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$– решениями. Поэтому, исследование всех правильно меняющихся решений данного уравнения остается актуальным. Решению этой задачи посвящена данная работа. Вводится следующий класс решений.

Решение $y: [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, [t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, уравнения (1) будем называть $T_\omega(Y_0, Y_1, \lambda)$-решением, если

$$y': [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \; (i = 0,1), \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \lambda,$$

где $\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega, \text{при } \omega < +\infty. \end{cases}$

С учетом предложения из [14], несложно заметить, что данный класс решений содержит все правильно меняющиеся решения уравнения (1).

Введем некоторые необходимые обозначения:

$$C = \frac{\alpha_0}{|\lambda|^{\sigma_0}}(1 - \sigma_0 - \sigma_1), F(z) = \frac{z}{|z|^{\sigma_0}\varphi_1(z)},$$

$$I(t) = \int_{A_\omega}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\, d\tau, \; A_\omega = \begin{cases} a, \text{если } \displaystyle\int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\, d\tau = +\infty, \\ \omega, \text{если } \displaystyle\int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J(t)=\int_{B_\omega}^{t} I(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{-\sigma_0-\sigma_1}d\tau\,, B_\omega=\begin{cases} b, \text{если} \int_b^\omega I(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{-\sigma_0-\sigma_1}d\tau, \\ \omega, \text{если} \int_b^\omega I(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{-\sigma_0-\sigma_1}\,d\tau. \end{cases}$$

***Получен следующий основной результат.***

***Теорема.*** *Для существования у уравнения (1)* $T_\omega(Y_0, Y_1, \lambda)$ *– решений порядка* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0{,}1\}$ *необходимо, а если*

$$\frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)\sigma_0}{1-\sigma_1} < 1 \text{ и } \frac{\sigma_0}{1-\sigma_1} < 1,$$

*и существует число* $M \in \mathbb{R}$: $|M| < |\lambda - 1||1-\sigma_0-\sigma_1|$, что

$$-M + (\lambda-1)(1-\sigma_0-\sigma_1) < \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} < M + (\lambda-1)(1-\sigma_0-\sigma_1),$$

*то и достаточно выполнение условий*

$$y_1^0\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t) > 0, y_1^0 y_0^0 \lambda\pi_\omega(t) > 0, \lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^\lambda sign\, y_0^0 = Y_0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_1^0\left(|I(t)|\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right) = Y_1, \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = \lambda\,(1-\sigma_0-\sigma_1)\,.$$

*Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления при* $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{|y'(t)|^{\sigma_0}\varphi_1\big(y'(t)\big)\Theta_0\big(y(t)\big)} = CI(t)\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \lambda\big(1+\bar{o}(1)\big).$$

## Список использованных источников:


1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения [текст] / Дж. Сансоне. – Пер. с итал. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 2. – 415 с.
3. Atkinson F. V. On second – order non – linear oscillations // Pasif. J. Math. – 1955. – V. 5, № 1. – P. 643-647.
4. Maric V., Tomic M. Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations // Publ. Inst. Math. – 1977. – V. 21, № 35 – P. 119-129.
5. Maric V., Tomic M. Asymptotics of solutions of generalised Thomas-Fermi equation // J. Differ. Equations – 1980. – V. 35 – P. 36-44.
6. Taliaferro S. D. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t)\, f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – V. 12. – P. 853-865.
7. Евтухов В. М., Кириллова Л. А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения.- 2005. – Т. 41, № 8. – С. 1053-1061.
8. Кирилова Л. О. Асимптотичні властивості розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена-Фаулера // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: «Рута». – 2004. – Вип. 228. – С. 30-35.
9. Кириллова Л. А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. – 2005. – Т.8, № 1. – С. 18-28.

10. Белозерова М. А. Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Математичні студії. – 2008. – Т. 29, № 1. – С. 52-62.
11. Білозерова М. О. Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: «Рута». – 2008. – Вип. 374. – С. 34-43.
12. Белозерова М. А. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями в некотором смысле близкими к степенным: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Белозерова Мария Александровна – Одесса, 2009. – 121 с.
13. Maric V. Regular Variation and Differential Equations – Springer, 2000. – 138 p.

**Присяжнюк Ю.М.**
*студентка,*
*Національний технічний університет України*
*«Київський політехнічний інститут»*

## ЕЛЕКТРОКІНЕТИЧНІ ЯВИЩА В КОНЦЕНТРОВАНИХ СУСПЕНЗІЯХ В НЕОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Відкриття електрокінетичного явища, електрофорез, електроосмос, і потенціалу протікання, породило концепцію подвійного електричного шару, який, в свою чергу, відіграє важливу роль в розумінні колоїдної стабільності.

Вивчення поведінки колоїдних частинок у розчинах рідин, зокрема, електролітах, а також дисперсійних системах є важливим для багатьох галузей науки та техніки. Відносний рух заряджених частинок (дисперсних фаз) і дисперсійних середовищ супроводжується появою заряду на границі розділу фаз і рухом однієї фази відносно іншої. Як відомо, явища, пов'язані із існуванням такого роду електричного заряду називаються електрокінетичними. Незалежно від причин, що призвели до відносного зміщення фаз, на поверхні розділу фаз колоїдної частинки та дисперсійного середовища виникає подвійний електричний шар.

За причинами виникнення електрокінетичні явища поділяються на явища, при яких відносний рух фаз викликається дією зовнішнього електричного поля (електрофорез – рух заряджених мікрочастинок у рідкому середовищі і електроосмос – рух дисперсійного середовища відносно дисперсної фази і явища, при яких виникнення різниці потенціалів обумовлено відносним рухом фаз (потенціал протікання і седиментаційний потенціал).

Подвійний іонний шар є причиною електрокінетичних явищ, тобто явищ відносного переміщення фаз в електричному полі або, навпаки, виникнення електричного поля в результаті переміщення фаз.

Різниця потенціалів, що виникає між двома шарами, які розміщені на різних висотах, при осіданні завислих частинок (наприклад, піщинок у воді) називається потенціалом осаду (седиментації), або ефектом Дорна.