$$\vec{E}_{MHD} = -\frac{\phi(1-\phi)}{\left(1+\frac{\phi}{2}\right)} \frac{(\rho_P - \rho_0)}{K^{\infty}} \mu \frac{\chi_0}{2} \nabla \vec{H}^2$$

де $\phi = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 N_P}{V}$

Це є співвідношення Онзагера між магнітофоретичним потенціалом $\vec{E}_{MHD}$і електрофоретичною рухливістю μ для концентрованої дисперсії сферичних частинок [5].

Для розбавлення випадку нехай ($\phi \to 0$), зокрема, стане відомо співвідношенні Онзагера між електрофорезом і магнітофоретичним потенціалом [1-3].

$$\vec{E}_{MHD} = -\frac{\phi(\rho_P - \rho_0)}{K^{\infty}} \mu \frac{\chi_0}{2} \nabla \vec{H}^2.$$

Список використаних джерел:

1. Booth F., J. Chem. Phys. 22, 1956(1954).
2. Levine S., Marriott J., Robinson K., Faraday Trans II; 71,1; 1975.
3. Levine S., Marriott J. R., Neake G., Epstein N., J. Colloid Interface Sci. 52,136; 1975.
4. Ohshima H. Cell model calculation for electrokinetic phenomena in concentrated suspensions: an Onsager relation between sedimentation potential and electrophoretic mobility. Advances in Colloid and Interface Science. 88 (2000) 1-18.
5. O. Yu. Gorobets Yu., Gorobets I. and Rospotniuk V. P. J. of App. Phy. 118; Magnetophoretic potential at the movement of cluster products of electrochemical reactions in an inhomogeneous magnetic field. 2015.

Римар П.В.
аспірант,
Донецький національний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ МОМЕНТІВ В ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИНАХ ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОГО «ЗГИННОГО» ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Фундаментальні рішення термопружності в теорії пластин та оболонок отримали свій розвиток при розв'язку задач про дію зосереджених джерел тепла в тонкостінних елементах конструкцій. Вперше задача о дії зосередженого джерела тепла була вирішена Е. Меланом та Г. Паркусом [1; 2]. В подальшому такі задачі були предметом фундаментальних теоретичних досліджень. Це монографії Я.С. Підстригача, Ю.М. Коляно [3-5]. До цього напряму відносяться також задачі про зосереджений нагрів, які для ізотропних пластин описав С. Лукасевич в многографії [6].

До публікацій останніх років відноситься ряд робіт [7; 8], де було досліджено напружений стан та стійкість ізотропної пластини, яка нагрівається джерелом тепла. Отримані формули, які визначають термонапружений стан пластини під дією зосереджених джерел тепла. В публікації [9] розв'язана задача термопружності для ізотропної пластини змінної товщини, яка знаходиться під дією джерел тепла при наявності теплообміну через основу та бічну поверхню. Передбачалося, що температура постійна по товщині та теплофізичні властивості нелінійно-деформівного матеріалу залежать від температури.

Термопружний стан в оболонках, схильних до зосередженого нагріву, був розглянутий в роботі [10]. В ній досліджені особливості напруженого стану циліндричних оболонок при дії зосереджених теплових джерел.

Задача о дії зосереджених джерел тепла була вперше вирішена в роботі [11]. Отримано фундаментальний розв'язок термопружності для ізотропних оболонок позитивної гаусовської кривини. Це єдина робота, в якій побудовано фундаментальний розв'язок термопружності з використанням рівнянь теплопровідності для оболонок, які враховують довільний теплообмін з навколишнім середовищем.

Розглянемо тонку ортотропну пластину товщиною $2h$, яка знаходиться в тепловому контакті з навколишнім середовищем. Конвективний теплообмін відбувається через лицьові поверхні пластини за законом Ньютона.

Введемо безрозмірну систему координат $x_i \left(i=\overline{1,3}\right)$, визначену з точністю до величини h ($x_1 = x/h$; $x_2 = y/h$; $x_3 = z/h$). Рівняння теплопровідності, яке записане в цій системі для випадку температурного згину ортотропних пластин при симетричному теплообміні матиме наступний вигляд [3]:

$$\Delta_\lambda T_2 - 3(1+\mu_1)T_2 = -3W_2\,,$$

де

$$\Delta_\lambda = \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\,,\quad \lambda_1 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}\,,\quad \lambda_2 = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}\,,\quad \mu_1 = Bi\,,$$

$$W_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-1}^{1} x_3 W_0(x_1, x_2, x_3)\,dx_3$$

λ_{11}, λ_{22}, λ_{33} – головні коефіцієнти теплопровідності, Bi – критерій Біо на поверхнях $x_3 = \pm 1$.

В безрозмірній системі координат рівняння термопружного згину ортотропних пластин має наступний вигляд:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = -\beta_1^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2} - \beta_2^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2}\,,$$

де $D_1 = \kappa D$, $D_2 = \kappa^{-1} D$, $D_3 = 2(\kappa \nu_2 D + 4G/3)$, $\beta_i^0 = D_i \chi_i$ $(i=1,2)$, $\chi_1 = \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2$,

$$\chi_2 = \nu_1 \alpha_1 + \alpha_2\,,\quad D = \frac{2}{3(1-\nu_1 \nu_2)}\,,\quad G = \frac{G_{12}}{E}\,,\quad E = \sqrt{E_1 E_2}\,,\quad \kappa = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$$

w – вигин пластини; E_1, E_2 – модулі Юнга для головних напрямків; G_{12} – модуль зсуву в серединній площині пластини; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона для головних напрямків; α_1, α_2 – температурні коефіцієнти лінійного розширення для головних напрямків.

В безрозмірній системі координат формули для знаходження вигинаючих (M_1, M_2) та крутного (H) моментів мають наступний вигляд:

$$M_1 = -D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) - \beta_1^0 T_2,$$

$$M_2 = -D_2\left(\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) - \beta_2^0 T_2,$$

$$H = -\frac{4}{3}G\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Моменти за цими формулами визначаються з точністю до величини Eh^2.

Дія зосередженого «згинного» джерела тепла моделюється за допомогою дельта-функції Дірака, яка стоїть в правій частині рівняння теплопровідності у випадку температурного згину і має наступний вигляд:

$$W_2(x_1, x_2) = W_2^* \delta(x_1, x_2)$$

де $\delta(x_1, x_2)$ – двовимірна дельта-функція Дірака, W_2^* – інтенсивність «згинного» джерела тепла.

Задача термопружного згину розв'язується за допомогою методу двовимірного інтегрального перетворення Фур'є. Після її розв'язання остаточні формули матимуть наступний вигляд:

$$M_1(r,\varphi) = \frac{3W_2^* D_1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2}\left(\frac{m_1(\theta)\beta(\theta)}{\Theta(\theta)\Lambda(\theta)} - \frac{\chi_1}{\Lambda(\theta)}\right)\times$$
$$\times \cos 2n\theta \cdot G_{n,n}(\mu_0(\theta) r)\,d\theta,$$

$$M_2(r,\varphi) = \frac{3W_2^* D_2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2}\left(\frac{m_2(\theta)\beta(\theta)}{\Theta(\theta)\Lambda(\theta)} - \frac{\chi_2}{\Lambda(\theta)}\right)\times$$
$$\times \cos 2n\theta \cdot G_{n,n}(\mu_0(\theta) r)\,d\theta,$$

$$H(r,\varphi) = \frac{8W_2^* G}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n\varphi \int_0^{\pi/2}\frac{m_3(\theta)\beta(\theta)}{\Theta(\theta)\Lambda(\theta)}\sin 2n\theta \cdot G_{n,n}(\mu_0(\theta) r)\,d\theta$$

де $\Theta(\theta) = D_1\cos^4\theta + D_3\cos^2\theta\sin^2\theta + D_2\sin^4\theta$, $m_1(\theta) = \cos^2\theta + \nu_2\sin^2\theta$, $\beta(\theta) = \beta_1^0\cos^2\theta + \beta_2^0\sin^2\theta$, $m_2 = \nu_1\cos^2\theta + \sin^2\theta$, $m_3(\theta) = \cos\theta\sin\theta$.

Спеціальна функція $G_{n,\nu}(z)$ [12] має наступний вигляд:

$$G_{n,\nu}(z) = (-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-n}\int_0^{\infty}\frac{t^{\nu-n+1}J_{\nu+n}(rt)}{t^2+c^2}dt,$$

$$-1 < \operatorname{Re}\nu < n + \frac{3}{2},\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} c > 0.$$

Список використаних джерел:

1. Мелан Э. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.

2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.

3. Подстригач Я. С. Неустановившиеся температруные поля и напряжения в тонких пластинках / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.

4. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно – К.: Наук. думка, 1976. – 311 с.

5. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно – М.: Наука, 1984. – 368 с.

6. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич – М.: Мир, 1982. – 544 с.

7. Мотовиловец И. А. О напряженном состоянии нагреваемой источником тепла пластины / И. А. Мотовиловец // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 5. – С. 62-67.

8. Мотовиловец И. А. Об устойчивости пластины, нагреваемой источником тепла / И. А. Мотовиловец // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 1. – С. 79-86.

9. Фомин В. Г. Задача термоупругости для пластинки переменной толщины, находящейся под влиянием источников тепла при наличии теплообмена через основания и боковую поверхность / В. Г. Фомин // 2 Междунар. науч.-техн. конф. «Инж.-физ. пробл. авиац. и косм. техн.», Егорьевск, 3-5 июня, 1997. Тез. докл. Ч. 1. – Егорьевск. – 1997. – С. 32-33.

10. Flugge W. Thermal singularities for cylindrical shells / W. Flugge, D. A. Conrad // Proc. of 3-rd U. S. National Congres of Appl. Mech. – 1958. – P. 321-328.

11. Авраменко Л. Е. Напряженно-деформированное состояние оболочек под действием сосредоточенных источников тепла / Л. Е. Авраменко, В. П. Шевченко // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 70-80.

12. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Уч. пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко / Донецк: Издательство Донецкого уни-та, 1980.