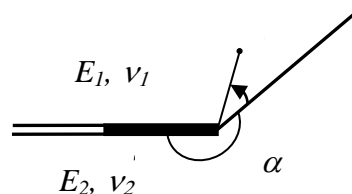


ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**Дудик М.В.***кандидат фізико-математичних наук, доцент;***Краснобокий Ю.М.***кандидат фізико-математичних наук, доцент;***Решітник Ю.В.***кандидат фізико-математичних наук, старший викладач;***Феньків В.М.***аспірант,**Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини***АНАЛІЗ ПАРАМЕТРІВ КОНТАКТНОЇ ЗОНИ
У ВЕРШИНІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ**

В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок розмірів контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, яка співпадає з кутовою точкою ламаної межі поділу двох різних матеріалів з модулями Юнга E_1 , E_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 і кутом зламу α . Контактна зона моделюється розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя. В області контакту передбачається стискувальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення.

Досліджується випадок, коли довжина контактної зони s значно менше довжини тріщини L , яку для зручності покладаємо рівною одиниці, та всіх інших суттєвих розмірів тіла. Це дозволяє розглядати тіло як кусково-однорідну площину з півнескінченим розрізом на одній з меж поділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті (Рис.1).

**Рис. 1. Розрахункова схема задачі**

На нескінченості формулюється умова можливості зшивання розшукуваного розв'язку з асимптотичним розв'язком біля вершини тріщини аналогічної задачі про міжфазну тріщину без контакту берегів [1].

Граничні умови відповідної крайової задачі теорії пружності мають вигляд:

$$\theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha), \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta, \quad (2)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha): \quad r < s, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \quad r > s, \quad \sigma_\theta = 0; \quad (3)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha), \quad r \rightarrow \infty: \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} 2\text{Re} \left(A r^{\lambda_r + i\lambda_{im}} \right) + o(1/r). \quad (4)$$

де $\langle f \rangle$ – стрибок величини f , $A = -\frac{B}{2} \frac{K}{\sqrt{2\pi}}$, $B = \frac{1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)}{2(1 + \kappa_1)}$, $e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}$, $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_{im}$ – комплексний показник сингулярності напружень [1], μ – коефіцієнт тертя, $K = K_1 + iK_2$ – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), що характеризує величину і конфігурацію зовнішнього

навантаження, та фазовий кут $\psi = \arctg \frac{K_2}{K_1}$, який характеризує ступінь змішування мод навантаження. КІН K вважаємо заданим за умовою задачі і таким, що забезпечує стискувальні напруження на берегах контактної зони.

Точний розв'язок сформульованої крайової задачі (1)-(4) знаходимо аналогічно розв'язку подібної задачі для тріщини на плоскій межі поділу [2]:

$$\int_1^\infty \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle_{\substack{r=\rho s \\ \theta=\beta \cup -\alpha}} \rho^p d\rho = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{p G_0^+(p)}{Q^+(p)} \left\{ \frac{A s^{\lambda_r + i\lambda_{im}}}{p+1+\lambda_r+i\lambda_{im}} \left[\frac{Q^+(p)}{p G_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})}{(1+\lambda_r+i\lambda_{im}) G_0^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\bar{A} s^{\lambda_r - i\lambda_{im}}}{p+1+\lambda_r-i\lambda_{im}} \left[\frac{Q^+(p)}{p G_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_r+i\lambda_{im})}{(1+\lambda_r-i\lambda_{im}) G_0^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})} \right] \right\}, \quad (\text{Re } p < 0) \\ \int_0^1 \sigma_\theta(\rho s, \beta) \rho^p d\rho = \frac{(p-\lambda_0) G_0^-(p) Q^-(p)}{B} \left\{ \frac{A s^{\lambda_r + i\lambda_{im}}}{p+1+\lambda_r+i\lambda_{im}} \frac{Q^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})}{(1+\lambda_r+i\lambda_{im}) G_0^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{A} s^{\lambda_r - i\lambda_{im}}}{p+1+\lambda_r-i\lambda_{im}} \frac{Q^+(-1-\lambda_r+i\lambda_{im})}{(1+\lambda_r-i\lambda_{im}) G_0^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})} \right\}, \quad (\text{Re } p > 0) \quad (5)$$

де \bar{A} – величина, комплексно спряжена A ; $\beta = 2\pi - \alpha$;
 $G_0(p) = \frac{2D_0(p)}{D(p)} \frac{\sin(p - \lambda_0)\pi}{B(1 + \kappa_1) \sin p\pi}$;

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G_0^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ G_0^-(p), & \text{Re } p > 0; \end{cases} \quad Q^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1 \mp p \pm \lambda_0)};$$

$$D_0(p) = (1-e)^3 2\mu \Delta_1 \Delta_2 - (1-e)e^2(1+\kappa_2)^2 \Delta_4 - (1-e)^2 e(1+\kappa_2) \Delta_5 + (1-e)(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \Delta_6 + \\ + (1-e)(1+\kappa_1)^2 \Delta_7 - (1-e)^2(1+\kappa_1) \Delta_8 + (1+\kappa_1)^2 e(1+\kappa_2) \Delta_9 - (1+\kappa_1)e^2(1+\kappa_2)^2 \Delta_{10},$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha; \quad \Delta_2 = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta;$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p(2\pi - \alpha) \cos 2p\pi, \quad \Delta_4 = \delta(\alpha) \Delta_2 \sin p\alpha, \quad \Delta_5 = \Delta_4 + (\delta_1 + 2\mu \sin^2 p\alpha) \Delta_2,$$

$$\Delta_6 = \delta(-\beta) \Delta_1 \sin p\beta,$$

$$\Delta_7 = 2\delta(\alpha - \pi) (p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p\beta) \sin p(\alpha - \pi) - 4\sin^2 p\pi (\delta_1 \cos^2 p(\alpha - \pi) + \mu \sin p\alpha \sin p\beta)$$

$$\Delta_8 = \Delta_6 - (\delta_1 + 2\mu \sin^2 p\beta)\Delta_1, \quad \Delta_9 = \sin^2 p\pi \cdot (\delta_1 - \delta(-\beta)\sin p\alpha),$$

$$\Delta_{10} = \sin^2 p\pi \cdot (\delta_1 + \delta(\alpha)\sin p\beta);$$

$$\delta(x) = \cos px + \mu \sin px, \quad \delta_1 = p \sin \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha); \quad D(p) \text{ – функція, визначена в [1];}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{-\mu\eta}{\sqrt{1+\mu^2\eta^2}} \right) - 1 \quad \text{– корінь рівняння } D_0^0(-1-x) = 0 \text{ на інтервалі } (-1;0),$$

$$\text{де } \eta = \frac{(1+e\kappa_2) - (e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2) + (e+\kappa_1)} \text{ – параметр Дундурса, } D_0^0(p) = \cos p\pi - \mu\eta \sin p\pi.$$

З отриманого розв'язку випливає вираз для довжини контактної зони:

$$s = \exp \left[\frac{1}{\lambda_{im}} \left(\frac{\pi}{2} - \psi + \gamma - \delta + \xi \right) \right], \quad (6)$$

$$\gamma = \arg G_0^+(-1-\lambda_r - i\lambda_{im}), \quad \delta = \arg Q^+(-1-\lambda_r - i\lambda_{im}), \quad \xi = \arctg \frac{\lambda_{im}}{1+\lambda_r},$$

та контактного напруження на берегах тріщини:

$$\sigma_\theta(r, 2\pi - \alpha \cup -\alpha) = \sum_k \frac{(1+\kappa_1)D(\lambda'_k)}{2D_0'(\lambda'_k)} \left(\frac{r}{s} \right)^{\lambda'_k} \frac{(-1-\lambda'_k)G_0^+(-1-\lambda'_k)}{Q^+(-1-\lambda'_k)} \times$$

$$\times \left[\frac{As^{\lambda_r+i\lambda_{im}}Q^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})}{(\lambda_r+i\lambda_{im}-\lambda'_k)(1+\lambda_r+i\lambda_{im})G_0^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})} + \frac{\bar{A}s^{\lambda_r-i\lambda_{im}}Q^+(-1-\lambda_r+i\lambda_{im})}{(\lambda_r+i\lambda_{im}-\lambda'_k)(1+\lambda_r-i\lambda_{im})G_0^+(-1-\lambda_r-i\lambda_{im})} \right]; \quad (7)$$

$$\text{тут } \lambda'_k \text{ корені рівняння } D_0(-1-\lambda'_k) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda'_k > -1; \quad D_0'(\lambda'_k) \equiv \left. \frac{dD_0(p)}{dp} \right|_{p=-1-\lambda'_k}.$$

Формула (7) справедлива для комплексних $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_{im}$; для дійсних λ_i вона набуває вигляду:

$$\sigma_\theta(r, 2\pi - \alpha \cup -\alpha) = \sum_k \frac{(1+\kappa_1)D(\lambda'_k)}{2D_0'(\lambda'_k)} \left(\frac{r}{s} \right)^{\lambda'_k} \frac{(-1-\lambda'_k)G_0^+(-1-\lambda'_k)}{Q^+(-1-\lambda'_k)} \left(\sum_i \frac{A_i s^{\lambda_i} Q^+(-1-\lambda_i)}{(\lambda_i - \lambda'_k)(1+\lambda_i)G_0^+(-1-\lambda_i)} \right) \quad (8)$$

Аналіз числових результатів. Згідно (6), довжина контактної зони при незмінній конфігурації зовнішнього навантаження не залежить від його модуля, який лінійно входить в коефіцієнти інтенсивності напружень. Для дослідження залежності розмірів контактної зони від конфігурації навантаження і параметрів композитного тіла розглянемо дію зосереджених сил з нормальними і дотичними компонентами P і Q, прикладених на відстані $a \ll L$ від вершини тріщини до її берегів. Конфігурація навантаження визначалась відношенням $n=P/Q$. Коефіцієнти інтенсивності для даного випадку визначені в [1]. Результати числових розрахунків довжини контактної зони для окремих параметрів тіла і навантаження подані на рис. 2. В усіх розрахунках покладалось $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

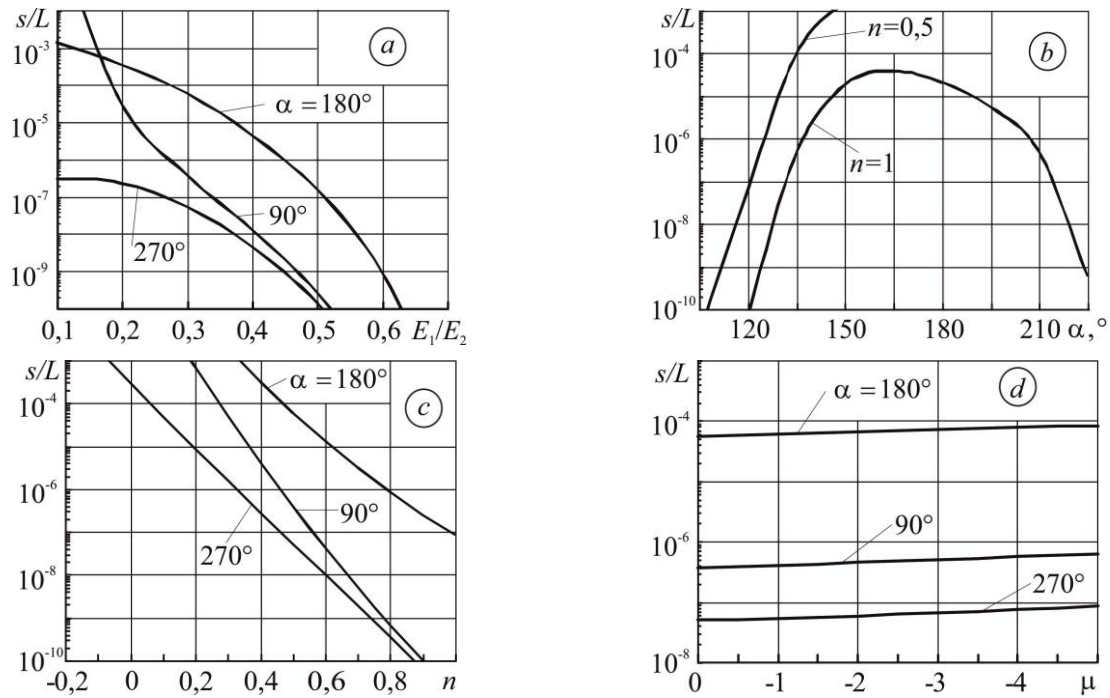


Рис. 2. Залежність довжини контактної зони від: а) відношення модулів Юнга для $n=0,5$, $\mu = -0,5$; б) кута зламу межі поділу для $E_1/E_2=0,1$, $\mu = -0,5$; в) конфігурації навантаження для $E_1/E_2=0,3$, $\mu = -0,5$; г) коефіцієнта тертя для $E_1/E_2=0,3$, $n=0,5$

Довжина контактної зони стрімко зменшується при зближенні пружних характеристик з'єднаних матеріалів (рис. 2а) та зі збільшенням відношення $n=P/Q$ розтягувальних зусиль до зсувних (рис. 2с), набуваючи екстремально малих значень, для яких контактна модель міжфазної тріщини стає фізично некоректною. Навпаки, зусилля, що призводять до зсуву берега тріщини в менш жорсткому матеріалі відносно протилежного берега в напрямку від вершини, зумовлюють розміри зони, зрівнянні за порядком величини з довжиною тріщини, однак у цьому випадку порушується прийнята в даній роботі умова маломасштабності зони, і для великих її розмірів отриманий розв'язок стає необґрунтованим.

Залежність розміру контактної зони від тертя виявляється менш вираженою: її довжина повільно зростає зі збільшенням тертя (рис. 2д). В той же час довжина області контакту берегів істотно залежить від кута зламу межі поділу з'єднаних матеріалів (рис.2с): в цій залежності виявляється максимум при куті зламу, близькому до $\alpha \approx 170^\circ$.

Згідно (6), напруження біля вершини тріщини мають степеневу особливість з дійсним показником сингулярності $-1 < \lambda'_1 < 0$ (рис. 3). Таким чином, контактна зона усуває просторові осциляції переміщень і напружень біля вершини тріщини, характерні для класичної моделі міжфазної тріщини на ламаній межі поділу при кутах зламу в інтервалі $60^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$. Проте, при відмінному від 0 коефіцієнті тертя показник сингулярності на порівняно

вузьких інтервалах кутів зламу може набути комплексних значень, які обумовлюють фізично некоректні просторові осциляції переміщень (штрихована ділянка на графіку $\lambda_1'(\alpha)$ для $\mu = -1$, рис. 3). Розв'язання цього протиріччя вбачаємо в утворенні зони передруйнування в околі вершини.

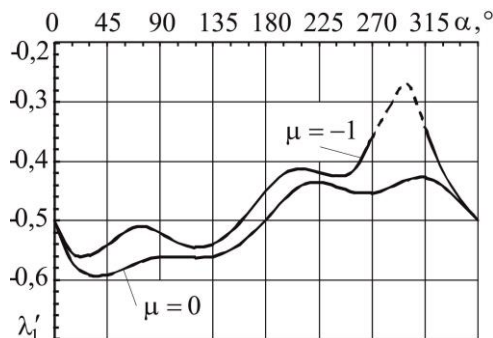


Рис. 3. Залежність показника сингулярності напружень від кута зламу межі поділу для $E_1/E_2=0,3$

Список використаних джерел:

1. Дудик М.В. Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2014. – № 3. – С. 87-98.
2. Камінський А.О., Дудик М.В., Кіпніс Л.А. Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 62-67.

Миронець О.В.

студент,

Рівненський державний гуманітарний університет

ОТРИМАННЯ НАНОКРИСТАЛІВ СПОЛУК ЦИНКУ ЕЛЕКТРОЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

Оксид цинку – прямозонний напівпровідниковий матеріал з шириною забороненої зони 3,37 eV і високою енергією зв'язку екситона ~60 meV, що робить його перспективним матеріалом для створення різних оптоелектронних пристроїв. Крім того, ZnO має низьку вартість, біологічну сумісність та високу екологічність, внаслідок чого знаходить практичне застосування у напівпровідниковій промисловості, медицині, хімічній технології, косметичі і фармакології. Різноманітність шляхів отримання, морфології і розмірності досліджених сполук відкриває нові перспективи їх застосування в екології, біотехнології та біомедицину. Оксид цинку використовують при виготовленні елементів сонячних батарей, світловипромінюючих діодів видимого і ультрафіолетового випромінювання, прозорих тонкоплівкових транзисторів,