

## ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

**Баск Н.С.**

*студент,*

*Національний педагогічний університет  
імені М.П. Драгоманова*

### **ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ В ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧАХ**

Математика нині відіграє важливу роль у природничо-наукових, технічних і гуманітарних дослідженнях. Сучасна економіка – наука про об'єктивні закономірності функціонування й розвитку суспільства – характеризується широким застосуванням математики. Дедалі зростає роль математики як фундаменту для підготовки спеціалістів фінансово-економічного профілю. Математичні методи й моделі є складовою методів і моделей економічної теорії. Їх використання, разом зі змістовним економічним аналізом, відкриває нові перспективи для економічної науки й практики.

У моделюванні економічних процесів роль інтеграла розглядається не так часто, але, не зважаючи на це, використання інтегрального числення для моделювання та дослідження процесів, що відбуваються в економіці, надає багатий математичний апарат [1].

Відповідно до програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів реалізація прикладної спрямованості навчання математики здійснюється за рахунок створення запасу математичних моделей реальних явищ та процесів, формування в учнів знань та вмінь їх для дослідження, а одним із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання математики є встановлення міжпредметних зв'язків математики з іншими предметами, зокрема з економікою [4].

Проблематикою застосування інтегрального числення в економічних задачах займалися вчені давно, але в сучасному суспільстві, яке ґрунтується на товарно-економічних відносинах, це питання залишається і надалі актуальним.

Згідно переліку навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання в основній і старшій школі закладів загальної середньої освіти з навчанням українською мовою, Лист МОН від 20.08.2018 № 1/9-5033 з рекомендованих підручників з математики таких авторів: Г. П. Бевз, В. Г. Бевз чи Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко або з алгебри авторів: Нелін Є. П., Долгова О. Є. учні 11-их класів вперше знайомляться з використанням інтегралів в економічних задачах [4].

А на уроках економіки, вони поглиблюють свої знання, використовуючи математичні розрахунки. Тим, хто обирає економічні спеціальності, вже більш

поглиблено читається математика для економістів або фінансова математика у спеціальних вищих навчальних закладах. Наприклад, за підручниками авторів: В. В. Барковського, Н. В. Барковської, М. В. Грисенко, В. Ю. Клепко, В. Л. Голець та інших.

Розглянемо конкретні випадки застосування визначених інтегралів в економічних задачах, а також наведемо приклади деяких задач. Серед випадків застосування визначених інтегралів в економічних задачах, найчастіше зустрічаються:

- застосування в динамічних процесах (обсяг виробленої продукції з продуктивністю праці за інтервал часу; виробнича функція Кобба-Дугласа);
- застосування в задачах реалізації товарів (надлишок споживача, вигода виробника);
- обчислення середніх значень економічних функцій (середні значення змінних витрат, доходу і прибутку підприємства);
- обчислення зміни витрат, доходу і прибутку зі збільшенням реалізації виробленої продукції із заданою функцією граничних витрат, доходу і прибутку;
- визначення приросту капіталу за відомими інвестиціями за інтервал часу;
- оцінка ступеня нерівномірності розподілу доходів населення (коефіцієнт нерівномірного розподілу прибуткового податку);
- застосування у фінансових задачах (повна дисконтна сума прибутку за певний час).

Наведемо деякі приклади задач.

Задача 1. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається функцією  $f(t) = -2,5t^2 + 24,75t + 111,1$ , де  $t$  – робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.

*Розв'язання.* Обсяг випуску продукції протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці, тому обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^5 f(t) dt = \int_0^5 (-2,5t^2 + 24,75t + 111,1) dt = \\
 &= \left( -\frac{2,53t^3}{3} + \frac{24,75t^2}{2} + 111,1t \right) \Big|_0^5 = -\frac{2,53 \cdot 125}{3} + \frac{24,75 \cdot 25}{2} + 111,1 \cdot 5 = \\
 &= -\frac{316,25}{3} + \frac{618,75}{2} + 555,5 = 759(\text{од.})
 \end{aligned}$$

*Відповідь:* обсяг продукції становить 759 одиниць [3].

Задача 2. Функція маржинальних витрат фірми має вигляд  $V'(x) = 23,5 - 0,01x$ . Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 1 000 до 1 500 одиниць.

*Розв'язання.* За формулою  $\int_a^b V'(x)dx = V(x)|_a^b = V(b) - V(a)$

зростання загальних витрат буде:

$$\begin{aligned} \int_{1000}^{1500} V'(x)dx &= \int_{1000}^{1500} (23,5 - 0,01x)dx = \left[ 23,5x - 0,01 \frac{x^2}{2} \right]_{1000}^{1500} = \\ &= 23,5 \cdot 1500 - 0,005 \cdot (1500)^2 - [23,5 \cdot 1000 - 0,005 \cdot (1000)^2] = \\ &= 2350 \cdot 50 - 50 \cdot 125 = 50 \cdot (235 - 125) = 5500 (\text{грн}) \end{aligned}$$

*Відповідь:* витрати зростуть на 5 500 гривень [2].

Задача 3. Нехай відомо, що на деякий товар попит задається функцією  $p = 4 - q^2$ , де  $q$  – кількість товару (в од.),  $P$  – ціна одиниці товару (у грн), а при  $p^* = q^* = 1$  досягається рівновага на ринку даного товару. Необхідно обчислити споживчий надлишок.

*Розв'язання:* споживчий надлишок визначається:

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{q^*} f(q)dq - p^* \cdot q^* = \int_0^1 (4 - q^2)dq - 1 \cdot 1 = \\ &= \left( 4q - \frac{q^3}{3} \right) \Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2 \frac{2}{3} (\text{грн}). \end{aligned}$$

*Відповідь:* споживчий надлишок складає  $2 \frac{2}{3}$  (грн). [6].

Задача 4. За чистими інвестиціями, заданими функцією  $I(t) = 7000\sqrt{t}$ , визначити: а) приріст капіталу за три роки; б) термін часу (у роках), після якого приріст капіталу становитиме 50 000 грошових одиниць, якщо функція інвестицій залишиться незмінною.

*Розв'язання.* а) Skorистаємося формулою для обчислення  $\Delta K$ , поклавши, що  $t_1 = 0$  та  $t_2 = 3$ .

$$\begin{aligned} \Delta K &= K(t_3) - K(t_0) = \int_0^3 7000\sqrt{t}dt = 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \\ &= 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3^3} = 24248,71 (\text{грош.од.}) \end{aligned}$$

б) Позначимо шукану тривалість часу через  $T$ , тоді  $\Delta K = \int_0^T I(t)$ . Якщо

функція залишиться незмінною, то приріст капіталу за умовою задачі становить  $\Delta K = 50000$ . Тому підставляємо:

$$50000 = \int_0^T 7000\sqrt{t}dt; \int_0^T 7000\sqrt{t}dt = 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^T = 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot T^{\frac{3}{2}};$$

$$50000 = 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot T^{\frac{3}{2}}; \quad T^{\frac{3}{2}} = \frac{50000}{7000} \cdot \frac{3}{2} = 10,71;$$

$$T = (10,71)^{\frac{2}{3}} = 4,86(\text{років}).$$

*Відповідь:* а) приріст капіталу за три роки становить 24 248,71 грошових одиниць; б) термін часу становить 4,86 років для того, щоб приріст капіталу становив 50 000 грошових одиниць [5].

Навівши приклади, навіть декількох, економічних задач, одразу можемо відмітити, що застосування економічного апарату (в нашому прикладі, інтегрального числення), значно спрощує можливість обчислень економічних показників та економить час. Тому використання визначеного інтеграла на практиці в економічних розрахунках безперечно є доцільним та необхідним.

### Список використаних джерел:

1. М.В. Грисенко Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
3. Бевз Г.П. Математика: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – 2-ге вид. – К.: Генеза, 2012. – 320 с.: іл. – Бібліограф.: с. 294.
4. Математика. Навчальна програма для 10–11 кл. загальноосвітн.навч. закл. (рівень стандарту) – Сайт МОНУ. – Режим доступу: <http://www.mon.gov.ua>.
5. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.
6. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. – М., Инфра-М, 1998.

**Лесик О.В.**

*студентка,*

*Національний педагогічний університет*

*імені М.П. Драгоманова;*

*учитель математики,*

*Спеціалізована школа I-III ступенів м. Києва № 120 з поглибленим вивченням предметів природничо-математичного циклу*

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ

Навчити учнів розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь – одне з найважливіших завдань учителя математики.

З текстових задач у шкільному курсі математики найчастіше зустрічаються такі, в яких йдеться про трійки пов'язаних між собою величин: час, відстань і швидкість, маса, ціна і вартість і т. ін. Щоб навчити учнів розв'язувати такі