ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Містюк В.Ю.
студентка,
Запорізький національний університет

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ, ЩО ДЕФОРМУЄТЬСЯ ЗА СТЕПЕНЕВИМ ЗАКОНОМ, ДЛЯ МАЛИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ШОРСТКОСТІ

Плоскі контактні задачі, теорії пружності для некласичних областей почали вивчатися в 30-х роках XX століття. Розв'язок нормальної контактної задачі для твердих пружних суцільних тіл, запропонований Г. Герцем, прийнято з припущенням, що поверхні контактуючих тіл є ідеально гладкими. Цілий напрям у технічних розрахунках базується на теорії Г. Герца. Але поверхні деталей машин не є ідеально гладкими. Вони завжди мають мікронерівності. І. Я. Штаєрман у своїй роботі вперше розглядає контактну задачу з урахуванням шорсткості [3]. Інші дослідження у цьому напрямку розглядаються при різних законах деформування шорсткості, але без урахування тертя між штампом і шорстким півпростором [1].

У даній роботі розглядається плоска задача про вдавлення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу, де мікровиступи шорсткості деформуються за степеневим законом. Цей степеневий закон деформування шорсткості, застосовується для контактних задач з невеликими зовнішніми навантаженнями [4].

Розглянемо задачу [3] про напружений стан, який з'являться в шорсткій товстій смузі при вдавлюванні в неї штампа, при цьому враховуватиметься сили тертя між штампом і пружною смугою. Будемо досліджувати випадок, коли штам знаходиться у стані граничної рівноваги і він знаходиться під дією сили F, яка дорівнює добутку коефіцієнта тертя ρ на величину сили Q, яка вдавлює штамп (рис. 1).

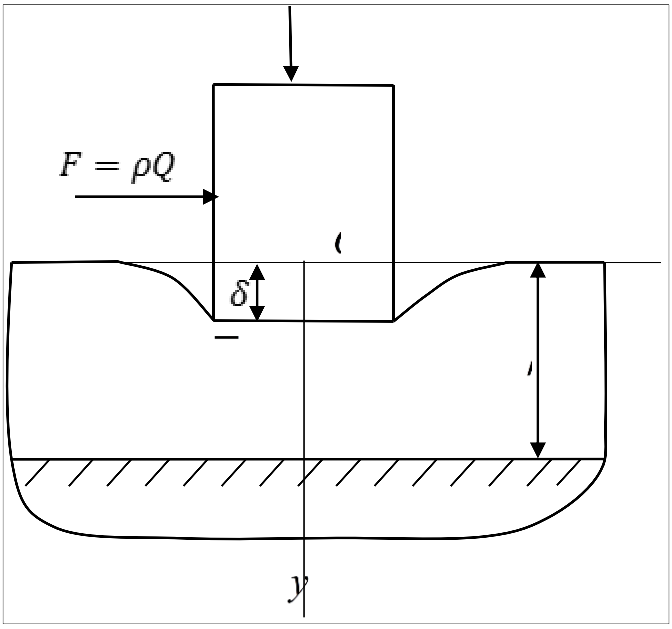

Рис. 1. Схема контакту штампа з пружним шаром

Відомо, якщо швидкість переміщення штампа по поверхні пружного тіла мала, у порівнянні зі швидкістю звука в пружному просторі, то при розв'язанні цієї задачі можна знехтувати динамічними явищами.

Розглянемо штамп, що має форму, $f(x)=0$ та вдавлюється в пружну смугу $\{|x|<+\infty,\ 0<y<h\}$ силою Q, що діє у напрямку осі Oy. Дослідимо два випадки закріплення смуги $(y=h)$:

1. Смуга лежить на жорсткій основі без тертя:

$$\tau_{xy}(x,h)=0,\quad v(x,h)=0,\quad |x|<+\infty;$$

2. Смуга жорстко закріплена на основі:

$$u(x,h)=v(x,h)=0.$$

де $u(x,h)$ – функція переміщень вздовж осі Ox, $v(x,h)$ – функція переміщень вздовж осі Oy. У обох випадках граничні умови на поверхні $y=0$

$$\tau_{xy}(x,0)=0,\quad \sigma_y(x,0)=0,\quad a<|x|<+\infty,$$

$$\tau_{xy}(x,0)+\rho\sigma_y(x,0)=0,\quad v(x,0)=\delta,\quad |x|<a,$$

мають вигляд:

де δ – заглиблення штампа при вдавленні, a – півширина площадки контакту.

У контактній задачі про вдавлювання з тертям штампа з плоскою основою в товстий шорсткий шар, для визначення функції нормального тиску маємо інтегральне рівняння [3; 4]:

$$\delta = W(\sigma_y, x) - \frac{2\left(1-\upsilon^2\right)}{\pi E}\left[\int_{-a}^{a}\sigma_y(x',0)\cdot k\left(\frac{x-x'}{h}\right)dx' -\right.$$

$$-\frac{1-2\upsilon}{2-2\upsilon}\pi\cdot\int_{-a}^{x}\left(-\tau_{xy}(x',0)\right)dx'\Bigg], \quad (1.1)$$

де E – модуль пружності, $\sigma_y(x,0)$ – функція напруг півпростору, $\tau_{xy}(x)$ – фунція дотичних напруг, які виникають у слої, ν – коефіцієнт Пуасона.

Врахуємо, що
$$\sigma_y(x,0) = -p(x),$$
$$\tau_{xy}(x,0) = \rho p(x),$$

де $p(x)$ – нормальний тиск, який діє на площадці контакту. Маємо:

$$\delta = B\left[p(x)\right]^{\kappa} + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\left[\int_{-a}^{a} p(x')\cdot\kappa\left(\frac{x'-x}{h}\right)dx' + \frac{1-2\nu}{2-2\nu}\pi\cdot\int_{-a}^{a}\rho p(x')dx'\right].$$

Перетворимо останнє інтегральне рівняння, для цього помножимо його на коефіцієнт $c_1 = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$. Отримаємо:

$$\delta = B\left[C_1 p(x)\right]^{\kappa}\cdot\frac{1}{C_1^{\kappa}} + C_1\left[\int_{-a}^{a} p(x')\cdot k\left(\frac{x'-x}{h}\right)dx' + C_1C_2\int_{-a}^{x}\rho p(x')dx'\right], \quad (1.2)$$

де $C_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}\pi$. В цьому випадку для визначення тиску маємо інтегральне рівняння (1.1). Його ядро має вигляд: $k(t) = -\ln|t| + a_0$,

де $a_0 = -0{,}352$ для першого випадку та $a_0 = -0{,}527$ для другого випадку при $\nu = 0{,}3$. Дане асимптотичне представлення ядра має місце для достатньо товстих смуг для яких $\lambda = \frac{a}{h} \le \frac{1}{2}$. Введемо позначення:

$$C_1 = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}, C_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}\pi, C_1p(x), B_1 = \frac{B}{C_1^{\kappa}}$$. Отримаємо рівняння:

$$\delta = B_1\left[p_1(x)\right]^{\kappa} + \int_{-a}^{a} p(x')\cdot\left[-\ln\left|\frac{x'-x}{h}\right| + a_0\right]dx' + C_2\rho\int_{-a}^{x} p_1(x')dx'. \quad (1.3)$$

Якщо ввести заміну $t = \frac{x}{a}$, $t' = \frac{x'}{a}$, $x' = t'a, dx' = a\cdot dt'$, де t буде змінюватися на проміжку $[-1,1]$, то рівняння (1.3) матиме вигляд

$$\delta = B_1\left[p_1(ta)\right]^{\kappa} + \int_{-1}^{1} p_1(t'a)\cdot a\cdot\left[-\ln\left|\frac{a(t'-t)}{h}\right| + a_0\right]dt' + C_2\rho a\int_{-1}^{1} p_1(t'a)dt'. \quad (1.4)$$

Якщо позначити $p_1(ta) = p_2(t)$ і поділити обидві частини рівняння (1.4) на a, то отримаємо інтегральне рівняння в безрозмірних величинах,

$$\delta_1 = B_2\left[p_2(t)\right]^{\kappa} + \int_{-1}^{1} p_2(t')\left[-\ln|t'-t| - C_0\right]dt' + C_2\rho\int_{-1}^{1} p_2(t')dt', \quad (1.5)$$

у якому $B_2 = \dfrac{B_1}{a}, \delta_1 = \dfrac{\delta}{a}, C_0 = \ln\dfrac{a}{h} - a_0$. Ввівши оператор

$$[Lp_2](t) = -\left[\int_{-1}^{1} p_2(t')\left[-\ln|t'-t| - C_0\right]dt' + \rho C_2 \int_{-1}^{1} p_2(t')dt'\right], \tag{1.6}$$

інтегральне рівняння запишеться в операторному вигляді

$$B_2\left[p_2(t)\right]^{\kappa} - \left[Lp_2\right](t) = \delta_1. \tag{1.7}$$

У задачі такого виду потрібно знайти безрозмірні величини: функцію тиску $p_1(t)$, заглиблення штампа δ_1. В цьому випадку потрібно додати друге рівняння, яке називається умовою рівноваги:

$$Q = \int_{-a}^{a} p(x')dx'. \qquad (1.8).$$

Помножимо обидві частини (1.8) на $\dfrac{C_1}{a}$: $\dfrac{QC_1}{a} = \dfrac{C_1}{a}\int_{-a}^{a} p(x')dx'.$ (1.9)

Позначимо $Q_2 = \dfrac{QC_1}{a}$, а під знаком інтеграла замінемо $t' = \dfrac{x'}{a}$, тоді рівність (1.9) набуде вигляду:

$$Q_2 = \int_{-1}^{1} p_2(t')dt'. \tag{1.10}$$

Отже, потрібно розв'язати операторне рівняння (1.7), враховуючи умови рівноваги (1.8), в яких невідомими є функція нормального тиску $p_2(t')$ і заглиблення штампа δ_1. Уведемо малий параметр $\alpha = 1 - \dfrac{B_2}{C^*}$, де C^* значення пов'язане з нормою оператора. Тоді рівняння (1.7) можна подати у вигляді $\left[P_2(t)\right]^{\kappa} - \alpha\left[P_2(t)\right]^{\kappa} - \dfrac{1}{C^*}\left[Lp_2\right](t) = \dfrac{\delta_1}{C^*}$. (1.11). Уведемо новий лінійний оператор $(Ap_2)(t) = \dfrac{1}{C^*}\left[Lp_2\right](t)$. Тоді рівняння (1.11) матиме вигляд $[p_2(t)]^{\chi} - \alpha[p_2(t)]^{\chi} - (Ap_2)(t) = \dfrac{\delta_1}{C^*}$. (1.12) Уведемо заміну: $\psi(t) = [p_2(t)]^{\chi} - \dfrac{\delta_1}{C^*}$, (1.13) функція тиску виразиться через $\psi(t)$ наступним чином: $p_2(t) = \left[\psi(t) + \dfrac{\delta_1}{C^*}\right]^{\frac{1}{\kappa}}$, а рівняння (1.12) – $\psi(t) - \alpha(\psi(t) + \dfrac{\delta_1}{C^*}) - (Ap_2)(t) = 0$; $\psi(t) = \alpha\left(\psi(t) + \dfrac{\delta_1}{C^*}\right) + A\left[\psi(t) + \dfrac{\delta_1}{C^*}\right]^{\frac{1}{\kappa}}$. (1.14). Через нелінійний оператор

$(G\psi)(t)=\alpha(\psi(t)+\frac{\delta_1}{C^*}+A\left[\psi(t)+\frac{\delta_1}{C^*}\right]^{\frac{1}{\kappa}}$, рівняння (1.14) запишеться у вигляді $\psi(t)=(G\psi)(t)$ (1.15). Рівняння (1.14) є інтегральним рівнянням Гаммерштейна в операторному вигляді, виражене через лінійний оператор A, а (1.15) – через нелінійний. На відмінну від дослідженої в роботі [4] плоскої контактної задачі про вдавлення штампа в шорстку пружну смугу при степеневому законі деформування шорсткості, у даній роботі враховано ще й тертя між смугою і штампом.

Список використаних джерел:

1. Грабко О. В. Д’яченко Н. М., Коптева М. Д. Розв’язок плоскої контактної задачі про вдавлення неплоского штампа в пружну шорстку смугу при степеневому законі деформування шорсткості. Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. 2011. № 2. С. 46-54.

2. Дьяченко Н. Н., Синченко Е. С., Качан А. И. Аналитическое и приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом трения и шероховатости. Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. 2016. № 1. С. 79-91.

3. Тітова О. О., Гриценко О. М., Д’яченко Т. А., Стасюк О. В. Плоска контактна задача про вдавлення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу при різних законах деформування шорсткості. Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. 2012. № 2. С. 105-113.

4. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане. Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. 2004. Вип. 1. С. 95-102.