Шинкарюк А.Т.
студент,
Коледж Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

ТЕОРЕТИЧНА БАЗА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математична статистика, яка виникла
спочатку для цілей демографії і страхування,
перетворюється на один з методів кількісного
дослідження явищ природи, технічних процесів
економіки і лінгвістики
Б.В. Гнеденко

Вивчення процесів та їх закономірностей у навколишньому середовищі часто зумовлює потребу проводити експерименти і спостерігати за їх наслідками.

Однак, якщо проводити велику кількість випробувань в однакових умовах і спостерігати за їх наслідками, то можна помітити певні закономірності, математичним аналізом, яких займається теорія ймовірності, що подібно до інших розділів математики розвинулася із потреб практики.

Означення математичної ймовірності такі, як: *кількість міри пізнавального об'єкту та класична ймовірність мають обмежену область застосування, оскільки далеко не завжди в реальних умовах можна виділити однаково можливі випадки у скінченій кількості*.

З практичних потреб людей виникає математична статистика, яка має цільове застосування теорії ймовірності для дослідження статистичних даних із метою одержання наукових і практичних висновків щодо закономірностей масових випадкових явищ.

Для розв'язання статистичних задач використовується статистичне означення ймовірності, яке залежить від проведення випробувань.

Означення. *Ймовірністю події А називається невідоме число p навколо якого зосереджується значення статистичної частоти здійснення події А при зростанні числа випробувань.*

Частоту випадкової події обчислюємо за формулою:

$$\text{частота}=\frac{\text{кількість появ події,яка цікавить}}{\text{кількість випробувань (спостережень)}}$$

Предметом теорії ймовірності в цілому є математичний аналіз випадкових подій, а математична статистика досліджує закономірності, яким підпорядковані масові випадкові події, на підставі статистичних даних – результатів спостережень. Ці закономірності вивчають за допомогою методів теорії ймовірностей, яка є теоретичною базою для математичної статистики.

Для висвітлення цього розглянемо окремі ймовірнісні поняття і методи, які пов'язані з випадковими подіями:

Стохастичний (випадковий) експеримент – експеримент, результат якого не можна передбачити наперед.

Елементарна (нерозкладна) подія – кожний окремий можливий результат експерименту (А, В,…).

Простір елементарних подій – сукупність (множина) усіх можливих результатів (Ω).

Статистична частота (відносна) (W_n(A) – стійкість.

Означення. *Відносною частотою $W_n(A)$ події А називається відношення числа $k_n(A)$ експериментів, у яких подія А відбулася до числа n усіх екпериментів* $W_n(A)= \frac{k_n(A)}{n}$

Статистична ймовірність (Р(А)) – міра можливості події А.

Означення. *Статистичною ймовірністю W(A) події А називається число P(A), навколо якого коливається відносна частота $W_n(A)$ появи цієї події в великих серіях експериментів.*

Відносна частота має такі властивості:

1) $0 \leq W_n(\mathrm{A}) \leq 1$;
2) $W_n(\Omega) = 1$;
3) Якщо А і В дві спостережувані несумісні події, то W_n(AUB)= W_n(A)+ W_n(B) (k_n(A)≤n; $k_n(\Omega)$=n, А і В – несумісні події).

Наведемо приклади, де покажемо використання цих понять для визначення результатів соціальних досліджень.

Приклад 1. В результаті соціальних досліджень по підготовці до виборів проводиться опитування певної кількості осіб на основі яких передбачають можливі результати.

Нехай n=1000 осіб. Подія А – подія, яка полягає в тому, що за кандидата Х проголосує 428 виборців, а подія В – що за кандидата У проголосує 501 виборець, решта електорату не визначились. Знайти ймовірність того, що виборець проголосує за кандидата У, і визначити орієнтовну кількість виборців, які проголосують за нього, якщо всіх виборці 40 млн., а з них візьмуть участь у виборах 70%.

Розв'язання

За означенням статистичної ймовірності

P(B)= $W_n(B)= \frac{501}{1000}$*=0,501*, де Р(В) – ймовірність того, що виборець проголосує за кандидата У.

Визначаємо кількість виборців, що візьмуть участь у голосуванні *n=40·0,7=28 млн*.

З формули

$$W_n(\mathrm{A})= \frac{k_n(\mathrm{B})}{n},\ k_n(\mathrm{B})=\mathrm{n}\cdot W_n(\mathrm{B}),\ k_n(\mathrm{B})=28\cdot 0{,}501=14{,}028\ (\text{млн})$$

Отже, 14,028 млн ймовірно проголосують за кандидата У.

В практичному застосуванні теорії ймовірностей трапляються задачі, в яких одне і те саме випробування повторюється неодноразово. При цьому всі випробування є незалежними, тобто такими, що ймовірність результату кожного з них не залежать від того, які результати має чи матиме решта випробувань. Прикладами можуть бути статистичні обмеження при яких у можливих n випадків, що не залежать один від одного крім яких подія **А** з'явиться m разів. При визначенні такої ймовірності користуються формулою Бернуллі.

$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, де $p=P(A)$ – ймовірність появи події А в одному випробуванні $q=1-p=P(\bar{A})$.

Приклад 2. Статистичні обстеження свідчать, що 90% сімей мають принаймні один телевізор. Яка ймовірність того, що три з чотирьох навмання вибраних сімей мають телевізор?

Розв'язання

Нехай подія А – навмання вибрана сім'я має телевізор. Тоді *P(A)=0,9* (90% мають телевізор), *p=0,9, q=1-0,9=0,1, n=4, m=3*

За формулою Бернуллі:

$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0{,}729 \cdot 0{,}1 = 4 \cdot 0{,}729 \cdot 0{,}1 = 0{,}2916$ – ймовірність того, що 3 із 4 сімей мають телевізор.

При великих значеннях n і m обчислення ймовірності $P_n(m)$ за формулою Бернуллі викликають значні труднощі, тому потрібно було знайти інші, які б дали можливість з достатньою точністю визначити ймовірність.

Вперше формула такого виду була знайдена Муавром в 1730 році, а потім узагальнена Лапласом на випадок довільного p, що не дорівнює 0 і 1.

$P_n(m) = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}}$, якщо $x_0 = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса.

Функція Гаусса табульована і подається в додаткових таблицях, які використовуються при розв'язуванні практичних задач.

Закон великих чисел є одним із таких законів теорії ймовірності.

У 1713 р., через вісім років після смерті швейцарського математика Якоба Бернуллі (1654-1705), вийшла друком його праця «Мистецтво передбачень», у якій було викладено цей основний закон теорії ймовірностей, який можна в загальному трактувати так:

Нехай дана послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$

Розглянемо випадкові величини ξ_n, що є даними симетричними функціями від перших n величин послідовності ξ_n: $\xi_n = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Якщо існує така послідовність постійних $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, що при будь якому $\varepsilon > 0$ $\lim P(|\xi_n - a_n| < \varepsilon) = 1$, то задана послідовність ξ_n підлягає закону великих чисел.

Суть *закону великих чисел* полягає в тому, що в разі дуже великого числа випробувань усереднений їх результат практично перестає бути випадковим і може бути передбачений з великою частковою ймовірністю.

У вузькому розумінні слова під «законом великих чисел» розуміють групу математичних теорем, у кожній із яких за тих чи інших умов встановлюється факт наближення середніх характеристик великого числа дослідів до відповідних сталих – невипадкових величин. Зокрема, це стосується поведінки відносної події за необмеженого збільшення числа дослідів.

Інший вид статистичної закономірності стійкість середнього значення. Практично під час кожної окремої спроби стійкість буде відхилятися в той чи інший бік під впливом тих чи інших факторів. Тому середнє значення показника за достатньо великого числа спроб стає стійким, наближаючись до деякого сталого числа, тобто практично не залежить від випадку.

Разом математична статистика і теорія ймовірностей зіграли значну роль у впровадження математичних методів у медицину, психологію, педагогіку, економіку. Вони постійно прагнуть поширити сферу свого застосування на проблеми ймовірнісного аналізу особистісних рис, здібностей та поведінки.

З'являються такі багатовимірні статистичні методи, як: факторний аналіз, дисперсійний аналіз, різні статистичні оцінювання, перевірка статистичних гіпотез.

Основною теоретичною базою для математичної статистики є поняття та методи теорії ймовірностей. Знання їх та вміння застосовувати для розв'язання практичних задач є вкрай необхідними для роботи у нових економічних умовах України.

Список використаних джерел:

1. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. Теорія ймовірностей і математична статистика – Підручник – К.: ВД «Професіонал», 2007, с. 560.
2. Гнеденко Б.В. Курс теорыи вероятностей М.: Наука, 1988, с. 406.
3. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Елементарное введение в теорию вероятностей М.: Наука, 1976, с. 168.
4. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах та задачах, Навчальний посібник, К.: 2015, с. 336.
5. Стаття Івашко В.Г., Ольвінська Ю.О. Статистичний аналіз стану та використання водних ресурсів України. Збірник наукових студентських праць В.З. частина І – Одеса, ОКЕУ – 2017, с. 82-89.
6. Руденко В.М. Математична статистика, Навчальний посібник, К.: Центр учбової літератури, 2012, с. 304.