Ведучий знає де насправді знаходиться приз. Він поки не розкриває ті двері, на яку ви показали. Але відкриває вам ще одну з решти дверей, за якою немає призу. Питання в тому, чи варто вам змінити свій вибір, або залишитися при колишньому рішенні?».

Вся суть в тому, що своїм початковим вибором ми ділимо дверей на дві частини! Одну обрану і дві невибрані. Таким чином, ймовірно між ними розподіляються як 1/3 і 2/3 відповідно.

Це і є наші шанси на перемогу. Ведучий, відкриваючи одну з двох невибраних нами дверей, показує, що за нею захований самокат. Шанси 2/3 нікуди не зникають, а зосереджуються на одній з невибраних дверей. Отже, зміна обраних дверей змінить ймовірність вибору автомобіля з 1/3 до 2/3, тобто рівно в два рази!

Цей висновок суперечить інтуїтивному сприйняттю більшості людей, тому описана задача і називається парадоксом Монті Холла [2].

Завдяки статистиці можна вирахувати ймовірність тої чи іншої ситуації, які події можуть відбути, при яких умовах вони можуть відбутися і розрахунок ймовірності у відсотках. Наприклад: є два стрільці ймовірність, що в ціль попаде перший 0,8%, а ймовірність, що попаде другий 0,5%.

В наш час статистику часто використовують в азартних іграх, намагаючись вирахувати найбільш вигідну і прибуткову подію.

Як висновок можна сказати, що математична статистика внесла значні зміни в наше життя. Розпочиналося все з простих підрахунків і з часом розвинулося до складних статистичних розрахунків які використовують у різних сферах.

Список використаних джерел:

1. Копич І.М., Копитко Б.І., Сороківський В.М., Пенцак О.С. Теорія ймовірностей та математична статистика. Методичні матеріали. Львів. Видавництво комерційної академії. Інтернет-видання formula.co. URL: http://formula.co.ua/blog/matematychna-statystyka-vstup/

2. Інтернет-видання michurin.net. URL: http://www.michurin.net/probability-theory/Monty-Hall-problem.html

Містюк В.Ю.

студентка,

Запорізький національний університет

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ КОШІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Рівняння, в яких разом із незалежною змінною міститься деяка невідома функція цієї змінної називаються функціональними.

Перші функціональні рівняння виникли при розв'язуванні деяких задач з механіки, а математики досліджували їх ще у XVIII-XIX століттях.

Шукаючи неперервну функцію f, що є розв'язком рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad (1)$$

Видатний французький математик Л.О. Коші розробив метод, який увійшов у математику як метод Коші, а рівняння виду (1) стали називати рівнянням Коші. Суть методу Коші полягає в тому, що пошук неперервної функції, яка є розв'язком функціонального рівняння (а саме таким є рівняння (1)), ведеться поетапно. На сам перед припускається, що шукана функція задовольняє рівність (1), і за допомогою вдало дібраних підстановок ця функція визначається спочатку на множині натуральних чисел, потім на множині цілих чисел, а потім – на множині раціональних чисел. Потрібно зазначити, що розв'язання рівняння Коші детально викладено в роботі [1], а метод граничного переходу описано у статті [2].

Доречно розглянути застосування методу Коші до розв'язування задач. Адже у закладах загальної середньої освіти у задачах, пов'язаних з розв'язуванням функціональних рівнянь, термін «функціональні рівняння» зазвичай, не використовуються.

Різні типи функціональних рівнянь розв'язуються за своїми правилами.

Найбільший клас цих рівнянь розв'язується методом підстановок. Суть цього методу полягає в тому, що ми припускаємо, що дане рівняння має розв'язок, застосовуємо до змінних, які входять до рівняння, деякі підстановки. Дістаємо систему рівнянь, що містить шукану функцію.

Задача 1 (8 клас)

Знайти всі функцію *f(x)*, яка задовольняє співвідношенню

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x, \text{ при всіх } x \neq 0$$

Розв'язання

Введемо заміну $t=\frac{1}{x}$, тоді $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{1}{t}$

Отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} f(t)+2f(\frac{1}{t})=t \\ f(\frac{1}{t})+2f(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$, з якої $f(t)=\frac{2}{3t}-\frac{t}{3}$.

Замінимо змінну t на x, отримаємо шукану функцію $f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}$. Виконаємо перевірку.

Відповідь. $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$

Задача 2 (9 клас)

Знайти на множині дійсних чисел функцію *f(x)*, яка задовольняє співвідношенню $2f(x)+f(1-x)=x^2$

Розв'язання

Зафіксуємо змінну x, тоді функціональне рівняння стане лінійним рівнянням з двома невідомими.

Введемо заміну $t=1-x$, тоді $2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2$

Отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} 2f(t)+f(1-t)=t^2 \\ 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2 \end{cases}$

Знаходимо функцію: $f(t)=\frac{1}{3}(t^2+2t-1)$

Отже, виконавши перевірку, робимо висновок, що функція $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$ є розв'язком даного функціонально рівняння.

Відповідь $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$

Існує цілий клас функціональних рівнянь, що містять невідомі функції, які утворюють групу. Основні труднощі полягають у відшуканні групи та потребують великої уваги при перетворенні рівнянь та розв'язанні складених систем рівнянь.

Задача 3 (10-11 клас)

Знайти всі функції *f:* $R\setminus\{0,1\}\to R$, які задовольняють рівняння

$$f\left(\frac{x}{1-x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=x$$

Розв'язання. Розглянемо елементи групи $G=\{g_1, g_2, g_3\}$:

$$g_1=x,\ g_2=\frac{1}{1-x},\ g_3=\frac{x-1}{x}.$$

Візьмемо $g_1g_2=x\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{x}{1-x}$, $g_3g_2=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{-1}{x}$.

Зробивши послідовні підстановки, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(g_1\cdot g_2)+f(g_2\cdot g_3)=x \\ f(g_2\cdot g_3)+f(g_3\cdot g_1)=\frac{1}{1-x} \\ f(g_3\cdot g_1)+f(g_1\cdot g_2)=\frac{x-1}{x} \end{cases}$$

$$f(g_1\cdot g_2)=f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-x+2x^2-x^3}{2x(1-x)}$$

Зробимо підстановку $x\to\frac{-1}{x}$ отримаємо $f(x)=-\frac{1+2x+x^2+x^3}{2x(1+x)}$, де $x\in R\setminus\{0,1\}$

Виконуємо перевірку.

Відповідь. $f(x)=-\frac{1+2x+x^2+x^3}{2x(1+x)}$

Задача 4. Знайти всі функції $f: N\to N$, такі, що: а) $f(1)=1$; б) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ для всіх $x, y\in N$.

Розв'язання

Нехай функція f задовольняє умови задачі. Тоді для $x=n, y=kn$, де n, m – довільні натуральні числа, а $k=1,\dots,m-1$маємо такі рівності:

$$f(2n)=2f(n)+n^2,$$
$$f(3n)=f(n)+f(2n)+2n^2,$$
$$f(4n)=f(n)+f(3n)+3n^2,$$

…………………

$f(mn) = f(n) + f\big((m-n)n\big) + (m-1)n^2$. Додавши всі рівності, одержимо:

$f(mn) = mf(n) + (1+2+3+\cdots+(m-1))n^2$. Враховуючи, що

$1+2+3+\cdots+(m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$, маємо рівність:

$f(mn) = mf(n) + \frac{m(m-1)}{2}n^2$, яка виконується для всіх натуральних $m\ і\ n$. Зокрема, для $n = 1$ одержуємо рівність:

$$f(m) = \frac{m(m+1)}{2}, \tag{2}$$

що визначає функцію f на множині натуральних чисел.

Оскільки a) $f(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$,

б) $f(x+y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = \frac{(x^2+x)+(y^2+y)+2xy}{2} = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2}xy = f(x) + f(y) + xy$, то функція (2) – єдина функція, що є розв'язком задачі.

Задача 5. Функція $f{:}\,R \to R$ для будь-яких $x, y \in R$ задовольняє рівність:

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \tag{3}$$

$$a\ f(1) = 2.$$

Знайти: а) f(n) для $n \in Z$; б)f($\frac{k}{n}$) для $\frac{k}{n} \in Q$.

Розв'язання

а) Нехай f – шукана функція. Тоді рівність (3) виконується для всіх дійсних x і y. Спочатку, поклавши $x = y = 0$, отримаємо рівняння

$f^2(0) - 2f(0) + 1 + 0$, з якого знаходимо, що $f(0) = 1$. Потім, виконуючи в рівності (3) послідовно заміни $x \to x+k, y \to 1$, де $k = 0,1, \dots n-1$, дістанемо n рівностей:

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x+1) + 1,$$
$$f(x+1) = f(x+1)f(1) - f(x+2) + 1,$$
$$f(x+2) = f(x+2)f(1) - f(x+3) + 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots.,$$
$$f(x+n-1) = f(x+n-1)f(1) - f(x+n) + 1.$$

Оскільки за умовою $f(1) = 2$, то, додаючи їх, одержимо рівність, яку запишемо так

$$f(x+n) = f(x) + n. \tag{4}$$

Звідси для $x = 0\ і\ x = -n$ одержуємо формули:

$$f(n) = 1 + n, \tag{5}$$
$$f(-n) = 1 - n, \tag{6}$$

Які визначають шукану функцію f відповідно на множині натуральних чисел і на множині цілих від'ємних чисел. Аналізуючи ці рівності, приходимо до висновку, що формула (5)задає шукану функцію на множині цілих чисел. У тому, що вона задовольняє задану рівність,легко переконатися безпосередньою перевіркою.

б) Якщо з рівності (3) припустити $y = n, n \in N$, то після перетворень з урахуванням рівностей (4) і (5) отримаємо:

$$f(nx) = nf(x) - n + 1. \tag{7}$$

Для цілих k і натуральних n, посилаючись на рівності (5) і (7), дістанемо:

$$k + 1 = f(k) = f\left(n \cdot \frac{k}{n}\right) = nf\left(\frac{k}{n}\right) - n + 1 =>$$

$$k = nf\left(\frac{k}{n}\right) - n => f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} + 1 \quad (8)$$

Одержана рівність визначає шукану функцію на множині раціональних чисел.

Розглянуті задачі та вправи будуть корисні при проведенні математичного гуртка, для дітей, які цікавляться математикою і прагнуть до досконалого її засвоєння. Одні з цих задач будуть доступними після ознайомлення з неперервністю функції, інші – після вивчення показнокової та логарифмічної функцій. Метод Коші розв'язування функціональних рівнянь може стати темою науково-дослідницької роботи учнів школи.

Список використаних джерел:

1. Бродський Я.С., Сліпенко А.К. Граничний перехід і функціональні рівняння // Математика. – 2000. – № 20. – С. 6-7.

2. Мерзляк А. Г., Полянський В. Б., Якір М. С. Алгебра – 8 підручник для класів з поглибленим вивченням математики. – Харків: Гімназія, 2008.

3. Недокіс В.А. Про функціональне рівняння Коші // У світі математики. – 1998. – Т. 6, випуск 2. – С. 53-62.

Салогуб Б.П., Штефанеса М.І.

студенти,

Коледж Чернівецького національного університету

ВИКОРИСТАННЯ АПАРАТУ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ ЛЮДСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Теорія ймовірностей – це розділ математики, який вивчає закономірності випадкових явищ, таких як: випадкові величини, випадкова подія, їх властивості, функції та операції над ними. Тобто, ця дисципліна вивчає такі явища, результат яких неможливо передбачити. Математичним апаратом теорії ймовірності є комбінаторика і теорія міри. Головним поняттям цієї науки являється випадкове випробування – це дія, яка приводить до певного результату, котрий ніяк не передбачити заздалегідь.

Сьогодні теорію ймовірності застосовують всюди – економіки всіх держав, кредити і депозити – знаходяться в рівноважному (або розбалансованому стані) завдяки вибору хороших (невдалих) моделей. Будь-який пошук ціни попиту і пропозиції також продиктований ймовірнісними процесами. Вся техніка, якою ми користуємося, в найближчому майбутньому буде настільки оптимізована, що виходитиме з ладу в короткий термін після закінчення гарантії. І все тому, що монополії зацікавлені не в якості товарів, а в заробітку на їх реалізації [2].