Хусид М.А.
пенсионер (инженер электросвязи)
Германия, г. Вецлар

ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Статья не включает в себя сложных математических выкладок, автор использует элементарные методы. Поэтому она может быть интересна самому широкому кругу читателей математиков.

1. Проблема Гольдбаха является известной открытой математической проблемой; в совокупности с гипотезой Римана включена под номером 8 в список проблем Гильберта (1900) и является одной из немногих проблем Гильберта, до сих пор остающихся нерешёнными по состоянию на 2020 год [1].

2. Теорема о сумме 4х простых. «Из справедливости тернарной гипотезы Гольдбаха (доказанной в 2013 году) следует, что любое чётное число – сумма не более чем 4 простых» [1].

Известно, что окончательно решена слабая проблема Гольдбаха.

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2\mathrm{N} + 1 \tag{1}$$

где слева сумма трёх простых чисел, справа нечётные числа, начиная с 9.

В данной работе автор приводит доказательство теоремы 1, опираясь на решение слабой проблемы Гольдбаха, что:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2\mathrm{N} \tag{2}$$

где справа сумма четырёх простых чисел, слева любое чётное число, начиная с 12, методом математической индукции.

Решение.

Для первого чётного числа 12 = 3+3+3+3. Допускаем справедливость для предыдущего N > 5:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2\mathrm{N} \tag{3}$$

Прибавим к обеим частям по 1

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 1 = 2\mathrm{N} + 1 \tag{4}$$

где справа нечётное число и согласно [1]

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 1 = p_5 + p_6 + p_7 \tag{5}$$

Прибавив к обоим частям ещё по 1

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2 = p_5 + p_6 + p_7 + 1 \tag{6}$$

Объединим $p_6 + p_7 + 1$ опять имеем некоторое нечётное число, которое согласно [1] заменяем суммой трёх простых и в итоге получаем:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2 = p_5 + p_6 + p_7 + p_8 \tag{7}$$

где слева следующее чётное число относительно (3),а справа сумма четырёх простых чисел.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2\mathrm{N} \tag{8}$$

Таким образом очевидное выполнения индуктивного математического метода. Что и требовалось доказать.

3. Обобщённая теорема о сумме 2К простых.

Теперь на основании вышеуказанной теоремы докажем обобщённую теорему 2: Чётное число 2N представляется суммой 2К простых нечётных чисел при этом 2N ≥ 6К, К > 1, где 2К количество простых чисел.

Решение.

Если 2К нацело делится на 4, то:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{(2\mathrm{K}-1)} + p_{2\mathrm{K}} = 2\mathrm{N} \tag{9}$$

объединяя слагаемые в группы по 4, имеем сумму любых чётных чисел больше и равных 2N ≥ 6К согласно доказанной теореме 1.

Если 2К не делится на 4 объединяем в группы по 4 и оставляем в конце 6 простых чисел, которые разбиваем на две группы по 3 простых числа.

Таким образом согласно теореме1 и доказанной слабой гипотезе Гольдбаха имеем любое чётное число 2N ≥ 6К.

4. Сравнение сумм 4х и 6 простых.

«В 1995 году Оливье Рамаре доказал, что любое чётное число – сумма не более чем 6 простых чисел» [1].

Из доказанной теоремы2 следует сумма шести простых равна сумме четырёх простых.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} \tag{10}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 2\mathrm{N} \tag{11}$$

где $2\mathrm{N} \geq 18$, $N \geq 9$

$$p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 2\mathrm{N}_1 \tag{12}$$

где $2\mathrm{N}_1 \geq 12$, $N_1 \geq 6$

$$2\mathrm{N} - 2\mathrm{N}_1 = p_7 + p_8 \tag{13}$$

$$p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = p_9 + p_{10} \tag{14}$$

Из чего вытекает сумма четырёх простых равна сумме двух простых и равна любому чётному числу начиная с 12. Представление чётных чисел от 6 до 18 (минимум суммы 6 нечётных простых) показываем арифметически суммой двух простых нечётных и чётного числа не представимого как сумма двух простых не существует.

Если (14) не равно, то не равно (13), то есть и сумма произвольных шести простых нечётных чисел не равна фиксированному чётному числу, а также произвольным четырём (10), то наступит неразрешимое противоречие теореме 1 и теореме 2.

Вывод:

Любое чётное число начиная с шести представимо в виде суммы двух простых нечётных чисел. Гипотеза Гольдбаха-Эйлера.

Таким образом мы доказали:

Любое чётное число начиная с 6 представимо в виде сумы двух нечётных простых.

$$p_1 + p_2 = 2\mathrm{N}$$

Проблема Гольдбаха-Эйлера верна и доказана!

1. Следствия из теоремы 1 и бинарной гипотезы Гольдбаха.

На основании теоремы о четырёх простых и доказанной гипотезы Гольдбаха-Эйлера имеются ряд следствий. Одно из которых актуальная задача в теории чисел.

Следствие. Если сумму двух простых из суммы четырёх для чётного 2N, начиная с 12, произвольно задать в открытом интервале [6, 2N – 6], то оставшиеся две простые переменные в сумме дают необходимое чётное число. Что, очевидно из доказанной гипотезы Гольдбаха-Эйлера.

6. **Задача о «близнецах»**

Простых чисел близнецов-бесконечное множество.

Любое чётное число,начиная с 14,представимо в виде суммы четырёх нечётных простых чисел из которых два простых – близнецы.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2\ N \tag{15}$$

Пусть $p_{3,}\ p_{4.}\cdot$ – простые числа близнецы, тогда разность любого чётного, начиная с 14, и суммы простых чисел близнецов тоже чётное число, которая согласно, доказанной гипотезе Гольдбаха-Эйлера равна сумме двух простых (следствие 4).

Далее расположим простые числа слева направо в порядке убывания.

И в случае, если чётное число $2N = 2p_2 + 2p_4 + 4$, то $p_1,\ p_2\cdot$ неизбежно также близнецы.

Вычтем из обоих частей (15) сумму $2p_2 + 2p_4$:

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 = 4 \quad (16)$$

Из (16), очевидно, $p_1,\ p_2\cdot$ – неизбежно близнецы.

Пусть их конечное число и последние простые числа близнецы $p_{3,}\ p_{4.}\cdot$

Обозначим два простых числа большие чем $p_{3,}\ p_{4.}\cdot$ как $p_1,\ p_2\cdot$.

Просуммируем все четыре простых числа и тогда согласно теореме о сумме четырёх простых имеется чётное число 2 N, при котором неизбежно большие $p_1,\ p_2\cdot$ – близнецы. И далее подставляя в сумму вместо $p_{3,}\ p_{4.}\cdot$ числовые значения $p_1,\ p_2\cdot$ в (15) процесс становится бесконечным и простых чисел близнецов – бесконечное множество.

Список использованных источников:

1. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%93%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B4%D0%B1%D0%B0%D1%85%D0%B0