

Рис. 15. Перехідний процес за струмом статора

Як видно з отриманих результатів, використання чотирьох окремих систем ПЧ-АД із загальним каналом завдання дозволяє: знизити кратність пускового струму до 3; збільшити швидкість системи (запуск 20 с замість 40 с); зменшити навантаження на механічні частини; збільшити відмовостійкість; зменшити вартість обладнання в порівнянні з системою СД.

Міхєєв Д.А.

студент;

Толмачов С.Т.

доктор технічних наук, професор;

Ільченко О.В.

кандидат технічних наук, доцент,

Криворізький національний університет

АЛГОРИТМ ЩІЛЬНОЇ УПАКОВКИ ПЛОСКИХ ТІЛ СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У НЕСКІНЧЕННОМУ КОНТЕЙНЕРІ

Дана задача відноситься до відомого класу *задач упаковки* [1]. Це один з класів задач математичної оптимізації, які вирішують проблему розміщення в заданому контейнері максимальної кількості об'єктів конкретної геометрії або заданого числа об'єктів у мінімальній кількості

контейнерів [2]. Під контейнером прийнято розуміти двовимірну або тривимірну опуклу або нескінченну область. Об'єкти повинні мати задану геометрію і, можливо, інші ознаки (колір, заборону на обертання, одно- або багатозв'язний характер та ін.).

Зазначені задачі мають велику історію і бібліографію, а також численні практичні й теоретичні застосування. У реальному житті вони можуть ставитися при щільному укладанні предметів (наприклад, ящиків) для складування або транспортування, при розкроюванні паперу, тканини, металу тощо з мінімальними відходами. У математичному аспекті це так звані NP-повні задачі, що вимагають для достовірного рішення перебору всіх комбінацій параметрів, число яких може досягати величезних значень. Одним з найбільш відомих прикладів таких задач є задача про комівояжера.

Історично найбільш ранніми були задачі з нескінченним контейнером та об'єктами простих форм – циліндрами та сферами. Ще в 1773 р. Лагранж довів, що упаковка кіл найвищої щільності досягається на шестикутній решітці (рис.1 а) та рівна $P = \sqrt{3}\pi/6 \approx 0.9069$ (строге доведення цього факту було дано лише в 1940 р.)

Відомо, що вказана щільна упаковка кіл не єдина. На основі однорідних мозаїк площини доведено існування 11 щільних упаковок кіл [3], деякі з них показані на рис. 1. Як альтернативу, всі щільні упаковки можна розглядати як двоякоперіодичні гетерогенні структури (ГС). Кожному типу упаковок у комплексній площині відповідає певний паралелограм періодів з основними періодами ω_1 і ω_2 та асоційований з ним об'єкт.

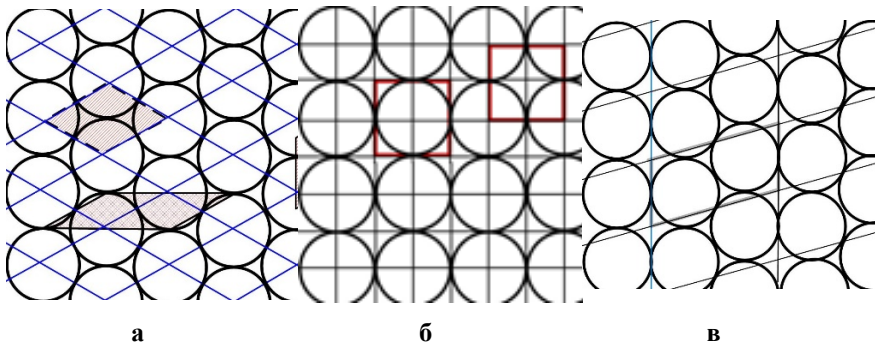


Рис. 1. Трикутна (а), квадратна (б) та подовжена трикутна (в) мозаїчні структури кіл

Важливо підкреслити, що в контексті задачі, що розглядається, уявлення дискретно-періодичної множини об'єктів у вигляді двоякоперіодичної ГС є найбільш компактним та універсальним.

Розглянемо важливі для подальшого визначення і властивості двоякоперіодичних ГС [4]. Нехай в комплексній площині E задана пара комплексних чисел ω_1 та ω_2 , причому $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. Паралелограм періодів з вершинами $u_0, u_0 + \omega_1, u_0 + \omega_2, u_0 + \omega_1 + \omega_2$ побудований на періодах ω_1 та ω_2 . Точки u та v називаються конгруентними за умови $u \equiv v \pmod{(\omega_1, \omega_2)}$ або $u = v + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, де $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Очевидно, множині конгруентних точок відповідає нескінченне число паралелограмів періодів, які покривають без перекриття всю комплексну площину E однією й тією ж сіткою. Зауважимо, що для заданої сітки пара періодів (ω_1, ω_2) не є єдиною. Періоди $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ та $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2)$ є еквівалентними при виконанні співвідношення $\omega'_2 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $\omega'_1 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$, де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – цілі числа, які задовільняють при $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ умові $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Надалі в якості базового будемо обирати паралелограм мінімальної площі. Приклади еквівалентних періодів показані на рис. 1 а.

Відзначимо кілька очевидних і важливих для подальшого тверджень, справедливих не тільки для кіл, а й для більш складних об'єктів.

1. Площі еквівалентних періодів однакові.
2. Паралелограм періодів може включати не один (рис. 1 а, б), а кілька об'єктів (рис. 1 в).
3. З кожним паралелограмом періодів завжди пов'язане ціле число об'єктів, хоча деякі їх частини можуть виходити за межі основного паралелограма (див. рис. 1).
4. При лінійному переміщенні паралелограма періодів або при переході до еквівалентних паралелограмів розташування об'єктів може бути різним, але всі базові властивості, в тому числі щільність упаковки, залишаються незмінними.

Тепер розглянемо задачу щільної упаковки довільних плоских об'єктів у нескінченний контейнер з двоякоперіодичною структурою (приклад такої ГС наведено на рис. 2). Щільність упаковки об'єктів P в загальному випадку визначається співвідношенням їх площі S до площі паралелограма періодів F . Без обмеження спільності прийемо $\text{Im}\omega_1 = 0$, тоді $F = \omega_1 \text{Im}\omega_2$ і $P = S/\omega_1 \text{Im}\omega_2$ (параметри S, ω_1, ω_2 слід задавати в спільній системі одиниць). У прикладі, що розглядається, $S = 38.3275$.

Оскільки величина S відома і не залежить від вибору паралелограма періодів (див. п. 4 вище), задача визначення найбільш щільної упаковки зводиться до знаходження такої пари періодів $\omega_{1\text{опт}}$ та $\omega_{2\text{опт}}$, при якій F досягає мінімального значення $F_{\text{мін}} = \omega_{1\text{опт}} \text{Im} \omega_{2\text{опт}}$ при єдиному обмеженні – об’єкти не перекриваються.

Для зручності період ω_2 задамо парою дійсних чисел $|\omega_2|$ і α , де α – кут між векторами періодів ω_1 та ω_2 . Тоді вектор визначальних параметрів \aleph набуде вигляду: $\aleph = (\omega_1, |\omega_2|, \alpha, \phi)$, де ϕ – кут орієнтації (повороту) об’єкту відносно фіксованого напрямку (наприклад, періоду ω_1). Безперервний характер компонентів цього вектору ускладнює оцінку кількості всіх наборів параметрів, оскільки вона залежить від діапазонів їх зміни і ступеня дискретизації. Тому в принципі можна говорити лише про різного ступеня наближення до точного рішення в залежності від вибору конкретної «траєкторії» в просторі цих параметрів.

Проілюструємо результати щільної упаковки наведених на рис. 2 об’єктів за наступним алгоритмом: 1) формується початковий вектор параметрів $\aleph_0 = (\omega_{10}, |\omega_{20}|, \alpha_0, \phi_0)$; 2) циклічно зменшується параметр ω_1 до мінімального значення ω_{1*} , при якому об’єкти стикаються ($\aleph_{1*} = (\omega_{1*}, |\omega_{20}|, \alpha_0, \phi_0)$); 3) аналогічно реалізується наближення по параметру $|\omega_2|$ до його мінімального значення $|\omega_{2*}|$ ($\aleph_{12*} = (\omega_{1*}, |\omega_{2*}|, \alpha_0, \phi_0)$); 4) оскільки перший результат щільної упаковки досягнутий, визначають значення концентрації включень P .

В подальшому повторюють ці цикли при новому значенні кута α і для кожного з них розраховують значення P (періоди ω_{1*} та $|\omega_{2*}|$ можуть бути іншими). Нарешті, всі ці цикли повторюються у зовнішньому циклі за кутом ϕ .

Для візуалізації процесу упаковки наведемо деякі ілюстрації процесу ущільнення, які відповідають різноманітним значенням вектору \aleph (рис. 2 – рис. 4).

Аналіз наведених вище результатів підтверджує можливість забезпечення щільної упаковки складних за геометрією об’єктів за допомогою наведеного вище алгоритму. Разом з тим, приналежність задачі до класу NP не дає підстав стверджувати, що знайдено оптимальне рішення (варіант в на рис. 2). Адже навіть аналогічна задача для найбільш простого кругового об’єкта має 11 варіантів щільної упаковки. Тому розглянута вище задача може мати повну кількість варіантів на декілька порядків вище. Адже навіть при реалізації циклів зміни основних періодів, як видно з варіантів б і в рис. 3, результат

відрізняються при зміні порядку реалізації циклів по основних періодах. Потенціально можливе збільшення щільності при чергуванні кроків за одним та іншим періодами. Тим не менше реалізація запропонованого алгоритму та використання достатньо потужних можливостей сучасних засобів обчислювальної техніки дозволяють визначити квазіоптимальний варіант упаковки, який буде однозначно кращим, ніж без проведення відповідного аналізу.

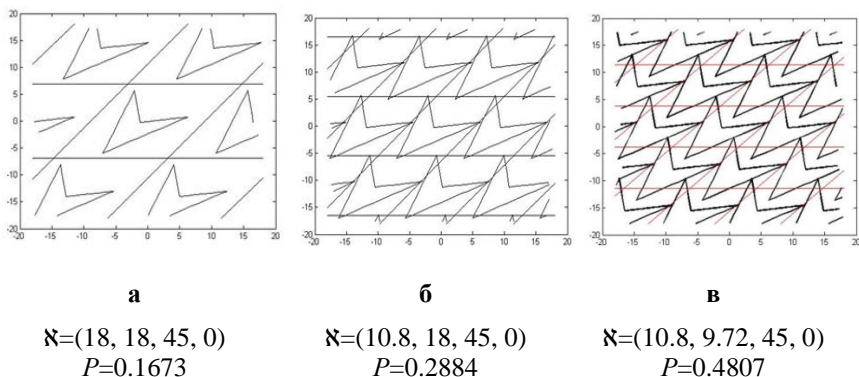


Рис. 2. Динаміка збільшення щільності включень ГС при зміні періодів ω_1 і ω_2 :

а – розріджена ГС; б – стикування за періодом ω_1 ; в – варіант щільної упаковки

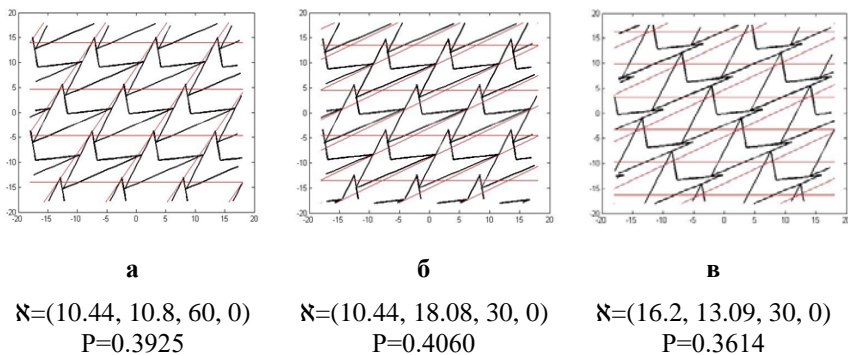
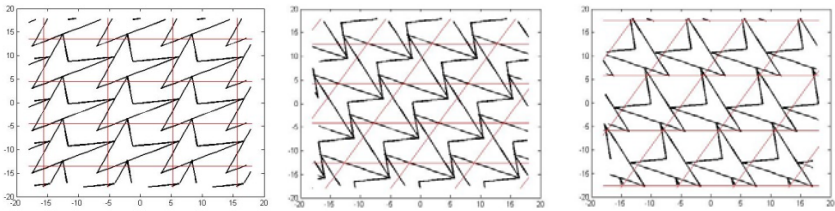


Рис. 3. Динаміка збільшення щільності включень ГС при зміні періодів ω_1 і ω_2 :

а – зміна ω_1 , потім ω_2 ; б – аналогічно з а; в – зміна ω_2 , а потім ω_1



а

$$\mathbf{k}=(10.8, 9, 90, 0)$$

$$P=0.4079$$

б

$$\mathbf{k}=(7.2, 9.72, 60, -90)$$

$$P=0.4216$$

в

$$\mathbf{k}=(9.36, 13.5, 60, 90)$$

$$P=0.3502$$

Рис. 4. Приклади щільної упаковки при різних значеннях вектору \mathbf{k}

Зауважимо також, що додаткові можливості покращення рішення можуть забезпечити існуючі алгоритми оптимізації цільової функції, евристичні методи та інші алгоритми розв’язання складних задач.

Список використаних джерел:

1. Задачи упаковки. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BF%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B0_%D0%BA%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%B2.
2. A. Lodi, S. Martello, M. Monaci. Two-dimensional packing problems: A survey // European Journal of Operational Research. – Elsevier, 2002. – Т. 141. – Р. 241–252.
3. Упаковка кругов. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BF%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B0_%D0%BA%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%B2
4. Толмачев С.Т., Бондаревский С.Л., Ильченко А.В. Магнитные свойства многокомпонентных гетерогенных сред с двоякопериодической структурой. *Електротехніка і електромеханіка*. 2020. № 2.