ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Башук О.О.
студент,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

КОНУСИ, ПОРОДЖЕНІ ВИПАДКОВИМИ ТОЧКАМИ НА ПІВСФЕРІ ТА ОПУКЛІ ОБОЛОНКИ ПРОЦЕСІВ ПУАССОНА

Зафіксуємо розмірність $d \geq 1$ і нехай $U_1, U_2, \dots$ будуть незалежними випадковими точками розподілені відповідно до рівномірного розподілу на d-вимірній верхній півсфері

$$\mathbb{S}_+^d := \{(x_0, x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}: x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1, x_0 \geq 0\}.$$

Нас цікавитиме випадковий опуклий конус в $\mathbb{R}^{d+1}$, визначений як додатня оболонка $U_1, \dots, U_n$, для $n \geq d+1$, формулою

$$C_n = \operatorname{pos}\{U_1, \dots, U_n\} := \{a_1 U_1 + \dots + a_n U_n : a_1, \dots, a_n \geq 0\}.$$

Випадковий конус, або більш точно, випадковий сферичний політоп $C_n \cap \mathbb{S}_+^d$, вивчався Барані та ін. [1]. Серед іншого згадані автори досліджували математичне сподівання f-вектора від C_n, тобто очікувану кількість $\mathbb{E} f_k(C_n)$ k-вимірних граней C_n, $k \in \{1, \dots, d\}$. f-вектор від конуса C_n пов'язаний з f-вектором сферичного політопа $C_n \cap \mathbb{S}_+^d$, як $f_k(C_n) = f_{k-1}(C_n \cap \mathbb{S}_+^d)$. Згідно з [1, Теорема 3.1] очікувана кількість граней $\mathbb{E} f_d(C_n)$ точно визначена, як

$$\mathbb{E} f_d(C_n) = \frac{2\omega_d}{2\omega_{d+1}} \binom{n}{d} \int_0^\pi \left(1 - \frac{a}{\pi}\right)^{n-d} \sin^{d-1} a \, \mathrm{d}a.$$

Крім того, там також було доведено, що
$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E} f_d(C_n) = 2^{-d} d! \, \kappa_d^2$.

Тут ω_d – це $(d-1)$-вимірна Хаусдорфова міра одиничної сфери $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, а κ_d – це об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^d$. Їх можна знайти за формулами

$$\omega_\mathrm{d} = \frac{2\pi^{\frac{\mathrm{d}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)} \text{ і } \kappa_\mathrm{d} = \frac{\pi^{\frac{\mathrm{d}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{d}}{2}+1\right)}.$$

Математичне сподівання кількості одно-вимірних граней конуса C_n (або відповідно кількості вершин $C_n \cap \mathbb{S}_+^d$) задовольняє, див. [1, Теорема 7.1],

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f_1(C_n) = C(d)\pi^{d+1}\left(\frac{2}{\omega_{d+1}}\right)^{d+1} \omega_d,$$

для деякої константи $C(d)$, що задана у вигляді багатовимірного інтегралу [1, Рівність 22]. Також зазначимо, що конуси створені випадковими точками з рівномірним розподілом на всій сфері $\mathbb{S}^d$ вивчались в [2] і [3].

Очевидно, що при достатньо великих n, конус C_n буде близьким до півпростору $\{x_0 > 0\}$, а тому, щоб не отримати тривіальну границю для C_n, треба змінити масштабування. Цього можна досягти лінійним оператором $T_n: \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$, визначеним як

$$T_n(x_0, x_1, \dots, x_d) \coloneqq (nx_0, x_1, \dots, x_d).$$

Позначимо через H_a гіперплощину $\{x_0 = a\}$ в $\mathbb{R}^{d+1}$. Відмітимо, що H_1 дотикається до півсфери $\mathbb{S}_+^d$ на її північному полюсі. Нехай e_0 буде одиничним вектором $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{d+1}$, напрямленим до північного полюсу. У [4] доведено, що випадковий опуклий політоп $(T_n C_n \cap H_1) - e_0$, що можна розгялдяати як «горизонтальний» переріз конуса $(T_n C_n)$, збігається за розподілом на просторі компактних опуклих підмножин H_0 до опуклої оболонки деякого пуассонівського процесу.

Щоб описати границю, візьмемо деякі $\gamma > 0, c > 0$ і нехай $\Pi_{d,\gamma}(c)$ буде пуассонівським процесом на $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, чия міра інтенсивності абсолютно неперервна відносно Лебегової міри, і чия щільність визначається рівністю

$$x \mapsto \frac{c}{\omega_{d+\gamma}} \frac{1}{\| x \|^{d+\gamma}}, x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\},$$

де $\|x\|$ – це Евклідова норма x. Відмітимо, що кількість точок $\Pi_{d,\gamma}(c)$ поза будь-якою кулею з центром в нулі і строго додатним радіусом, майже напевно скінченна, в той час, як кількість точок всередині будь-якої такої кулі є нескінченною з ймовірністю один. І хоч $\Pi_{d,\gamma}(c)$ майже напевно містить безліч точок, випадкова опукла множина $\operatorname{conv} \Pi_{d,\gamma}(c)$ майже напевно буде політопом, де $\operatorname{conv} \Pi_{d,\gamma}(c)$ позначає опуклу оболонку всіх точок $\Pi_{d,\gamma}(c)$.

В данному випадку, як показано в [4, Теорема 2.1], параметри слід вибрати так $\gamma = 1, c = 2$. Тобто при $n \to \infty$, випадковий політоп $(T_n C_n \cap H_1) - e_0$ збігається за розподілом до $\operatorname{conv} \Pi_{d,1}(2)$ в просторі компактних опуклих підмножин $\mathbb{R}^d$ з Хаусдорфовою метрикою.

Перевіримо даний результат методом моделювання. Спершу навчимося моделювати рівномірний розподіл на одиничній сфері. Для цього покажемо, що якщо $N_1, N_2, \dots, N_d$ незалежні стандартні Гаусівські випадкові величини, то вектор $\vec{\xi} = \left(\frac{N_1}{\|\vec{N}\|}, \dots, \frac{N_d}{\|\vec{N}\|}\right)^{\mathsf{T}}$ має рівномірний розподіл на сфері, де $\|\vec{N}\|$ – норма вектора $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_d)^{\mathsf{T}}$.

Вектор $\vec{\xi}$ має рівномірний розподіл на сфері, якщо його розподіл є інваріантним відносно ортогональних перетворень. Покажемо спершу інваріантність вектора $\vec{N}$ відносно ортогонального перетворення $O(\cdot)$

$$\mathbb{P}\{(N_1, N_2, \dots, N_d) \in A\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_A e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{2}} dx_1 \dots dx_d.$$

Тоді

$$\mathbb{P}\{O(N_1, N_2, \dots, N_d) \in A\} = \mathbb{P}\{(N_1, N_2, \dots, N_d) \in O^{\mathsf{T}}(A)\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{O^{\mathsf{T}}(A)} e^{-\frac{\vec{x}^{\mathsf{T}} * \vec{x}}{2}} dx_1 \dots dx_d = \left| \begin{matrix} \vec{y} = O * \vec{x} \\ \vec{x} = O^{\mathsf{T}} * \vec{y} \\ \vec{x}^{\mathsf{T}} = \vec{y}^{\mathsf{T}} * O \\ O * O^{\mathsf{T}} = E \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_A e^{-\frac{\vec{y}^{\mathsf{T}} * \vec{y}}{2}} dy_1 \dots dy_d = \mathbb{P}\{(N_1, N_2, \dots, N_d) \in A\},$$

де $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)^{\mathsf{T}}$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_d)^{\mathsf{T}}$, а E – одинична матриця. Отже $\vec{N}$ та $O(\vec{N})$ рівні за розподілом. Іншими словами, якщо припустити, що $O = \left(\alpha_{i,j}\right)_{i,j=\overline{1,d}} = (\vec{\alpha}_i)_{i=\overline{1,d}}$, то N_i та $\vec{\alpha}_i * \vec{N}$ мають однакові розподіли для всіх $i = \overline{1,d}$. Тоді однакові розподіли також мають вектор $\vec{\xi}$ та $\left(\frac{\vec{\alpha}_1 * \vec{N}}{\|O(\vec{N})\|}, \dots, \frac{\vec{\alpha}_d * \vec{N}}{\|O(\vec{N})\|}\right)^{\mathsf{T}}$, де $\|O(\vec{N})\| = \sqrt{\left(\vec{\alpha}_1 * \vec{N}\right)^2 + \dots + \left(\vec{\alpha}_d * \vec{N}\right)^2}$.

Розпишемо $\|O(\vec{N})\|^2$

$$\|O(\vec{N})\|^2 = \left(\vec{\alpha}_1 * \vec{N}\right)^2 + \dots + \left(\vec{\alpha}_d * \vec{N}\right)^2 = \sum_{i=1}^{d} \left(\vec{\alpha}_i * \vec{N}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_{i,j}^2 N_j^2 + \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=j+1}^{d} 2\, \alpha_{i,j} \alpha_{i,k} N_j N_k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} N_j^2 \sum_{i=1}^{d} \alpha_{i,j}^2 + \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=j+1}^{d} N_j N_k \sum_{i=1}^{d} 2 \alpha_{i,j} \alpha_{i,k}\,.$$

В силу властивості $O * O^{\intercal} = E$, $\sum_{i=1}^{d} \alpha_{i,j}^2 = 1$ і $\sum_{i=1}^{d} 2\alpha_{i,j}\alpha_{i,k} = 0$. Отже $\|O(\vec{N})\|^2 = \sum_{j=1}^{d} N_j^2 = \|\vec{N}\|^2$. Тоді

$$\left(\frac{\vec{\alpha}_1 * \vec{N}}{\|O(\vec{N})\|}, \dots, \frac{\vec{\alpha}_d * \vec{N}}{\|O(\vec{N})\|}\right)^{\intercal} = \left(\frac{\vec{\alpha}_1 * \vec{N}}{\|\vec{N}\|}, \dots, \frac{\vec{\alpha}_d * \vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right)^{\intercal} = O(\vec{\xi}).$$

Отже $\vec{\xi}$ та $O(\vec{\xi})$ мають однакові розподіли. Тоді вектор $\vec{\xi}$ лежить на одиничні сфері і має розподіл інваріантний відносно ортогональних перетворень, а відповідно вектор $\vec{\xi}$ має рівномірний розподіл на сфері.

Для моделювання Гаусівських випадкових величин можна скористатись формулою $\xi_1 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos 2\pi\alpha_2$ та $\xi_2 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\sin 2\pi\alpha_2$, де α_1, α_2 мають рівномірний розподіл на $[0, 1]$, див. [5, ст. 56, (5.1.2)].

Відповідно, ми можемо промоделювати рівномірний розподіл на одиничній сфері, а отже і на одиничній півсфері.

Тепер можемо перевірити збіжність за розподілом $(T_n C_n \cap H_1) - e_0$ до $\operatorname{conv} \Pi_{d,1}(2)$ в $\mathbb{R}^d$. Для цього будемо перевіряти поточкову збіжність опорних функцій відповідних політопів для $d = 2$. Далі наведено результати усереднених значень опорних функцій для 10 напрямків.

Кут	0	36	72	108	144	180	216	252	288	324
Сферична оболонка	0.320	0.381	0.339	0.310	0.325	0.386	0.314	0.322	0.341	0.373
Пуассо-нівська оболонка	0.337	0.336	0.338	0.330	0.339	0.334	0.331	0.334	0.340	0.338
Модуль різниці	0.017	0.045	0.001	0.020	0.014	0.052	0.017	0.012	0.001	0.035

Наведені значення підтверджують теоретично доведений факт. Наочно результат моделювання можна побачити на рис. 1.

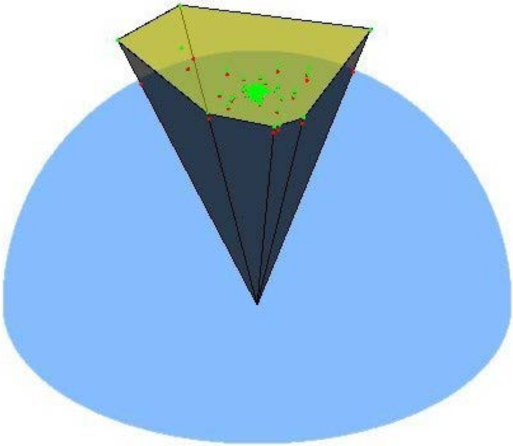

Рис. 1. Випадковий конус C_n, де червоним позначені точки на верхній півсфері, зеленим – точки, що відповідають останнім на гіперплощині H_1, жовтим – переріз конуса C_n гіперплощиною H_1

Список використаних джерел:

1. I. Barany, D. Hug, M. Reitzner, and R. Schneider. Random points in halfspheres. Random Struct. Algorithms, 50(1): 3–22, 2017. doi: 10.1002/rsa.20644

2. T.M. Cover and B. Efron. Geometrical probability and random points on a hypersphere. Ann. Math. Stat., 38: 213–220, 1967. doi: 10.1214/aoms/1177699073

3. D. Hug and R. Schneider. Random conical tessellations. Discrete Comput. Geom., 56(2): 395–426, 2016.

4. Zakhar Kabluchko, Alexander Marynych, Daniel Temesvari and Christoph Thale. Cones generated by random points on half-spheres and convex hulls of Poisson point processes. Probab. Theory Rel. Fields, 170: 1021–1061, 2019.

5. Некруткин В.В. Моделирование распределений. 2014.