ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Волкова Є.А.
студентка,
Науковий керівник: **Рибак О.В.**
кандидат фізико-математичних наук, старший викладач,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ІДЕАЛЬНІ РОЗБИТТЯ ПІДМНОЖИН

1 АНАЛІЗ ЧАСТИННОГО ВИПАДКУ M=3 N=3

1.1. Теоретичне підґрунтя

Визначення теореми про ідеальні розбиття міститься в статті [3], а саме: теорема про ідеальні розбиття підмножин стверджує, що для будь-яких натуральних чисел m та n всі m-елементні підмножини mn-елементної множини можна розбити на групки по n елементів так, щоб підмножини в кожній групі не перетиналися та утворювали повне покриття батьківської множини. Розглянемо таку ситуацію: у місті проходить турнір з потрійних шахів (де дошка розрахована на трьох гравців). У турнірі приймають участь 3 школи (n=3), де з кожного висунуто на змагання по 3 учасника (m=3).

Зобразимо графічно учасників як деяку обмежену частину простору, в якій стовпці пронумеровані як умовні позначення для учнів, а рядки пронумеровані як назви шкіл, що приймають участь у змаганні. Нехай школи мають назви a, b, c, з кожної висунуто учасників 1, 2, 3. Для зручності позначимо учасників жирними точками.

Отримали початкову схему поверх якої будемо накладати графи, що зображатимуть відносини між учасниками у змаганні на кожному турнірі. Необхідно провести змагання в одне коло так, аби кожен учасник з кожної коли зіграв з двома іншими з усіх можливих шкіл рівно один раз, та щоб учасники не перевтомлювалися, кожен має грати не більше однієї гри на день.

Введемо поняття *координат (x, y) для кожного елементу,* де *x, y є* F_3

F_3 – це множина {0, 1, 2} з такою арифметикою, як в таблиці 1:

$\oplus$	**0**	**1**	**2**
0	*0*	*1*	*2*
1	*1*	*2*	*0*
2	*2*	*0*	*1*

Таблиця 1. – Арифметика множини F_3

Де «зміщення» позначено символом $\oplus$.

$$a \oplus b: (a+b) mod 3$$

Тобто для школи c, що має порядковий номер *3* виконується:

$$c \oplus 1: (3+1) mod 3 = 1$$

Де порядковий номер 1 має школа a. Отже зміщення по координатам є аналогією зміщення за годинниковою стрілкою на схемі на певну кількість точок (учасників).

1.2. Загальні розрахунки

Перенесемо цю теоремо на практику: змагання між школярами з різних шкіл, де кожен грає не більше однієї гри у деякий період часу, наприклад один раз на день. Така гра трьох суперників називатиметься турніром. В день може бути стільки турнірів, скільки всього шкіл приймає участь. В нашому випадку в день проводитиметься n турнірів по m учнів. Тоді скільки ж днів буде тривати таке змагання? Отже щоб всі зіграли між собою по одному разу маємо стільки варіантів:

$$C_{mn}^{n} = \frac{(m*n)!}{(mn-n)!*n!}, \frac{(m*n)!}{(mn-n)!*n!} = \frac{(m*n)!}{(n(m-1))!*n!}$$

$$C_{mn}^{n}/n = \frac{(m*n)!}{(mn-n)!*n*n!}$$

Отже змагання по 3 учні з 3 шкіл триватиме

$$\frac{C_9^3}{3} = \frac{(m*n)!}{(mn-n)!*n*n!} = \frac{(3*3)!}{(9-3)!*3!*3} = 28$$

Приклад графічного зображення:

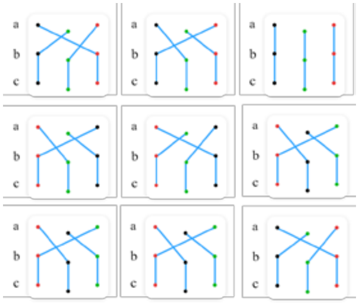

Рис. 1. Графічне зображення турнірів в 20-28 дні

1.3. Узагальнення отриманих даних

Перенесемо отримані дані на загальний випадок, що не відноситься до змагань та шкіл. Лише теоретичне застосування на числах.

Ми маємо три групи в даному випадку, назвемо їх *a, b, c*. Тоді перший елемент групи *a* буде *a,* другий елемент $a\oplus1$, третій $a\oplus2$.

В *перший етап* комбінуємо лише всі трійки кожної з n груп між собою. Цей розклад матиме тип *(3, 0, 0)*. Почнемо з нього. Загалом буде 1 етап такого типу з такими координатами:

(3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3)

В загальному вигляді через координати маємо таку схему:

$$(a, a\oplus1, a\oplus2)\ (b, b\oplus1, b\oplus2)\ (c, c\oplus1, c\oplus2)$$

На *етапах 2-18* маємо такі координати:

$$(a, a\oplus1, b\oplus2)\ (b, b\oplus1, c\oplus2)\ (c, c\oplus1, a\oplus2)$$

На *етапах 19-28* маємо такі координати:

$$(a, b, c)\ (a\oplus1, b\oplus1, c\oplus1)\ (a\oplus2, b\oplus2, c\oplus2)$$

2 АНАЛІЗ ЧАСТИННОГО ВИПАДКУ m=3 n=3^2

Другий розділ присвячено застосуванню теореми про ідеальні розбиття підмножин для mn-елементної множини, де *m=3* $n=3^2$. Аналогічно до попереднього випадку *m=3 n=3* розглянемо які схеми загального вигляду задовольняють правилам проведення змагань.

Маємо всього *mn* учасників. Необхідно з них вибрати всі групи по *n* учасників так, щоб ці групи не перетиналися та утворювали повне покриття множини з *mn* учасників. Отже щоб всі зіграли між собою по одному разу маємо стільки днів:

$$C_{mn}^{n}/n = \frac{(m*n)!}{(mn-n)!*n*n!}$$

Підставимо наші дані:

$$\frac{(m*n)!}{(mn-n)!*n*n!} = \frac{(3*9)!}{(27-3)!*3!} = 325$$

Отже всього таке змагання триватиме *325* днів. За аналогією до випадку *m=3 n=3* матимемо три основні випадки розбиттів: *(3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)* та всі їх перестановки.

Для турнірів у 1 день змагання

Узагальнене правило таке:

$$(a, \mathrm{a} \oplus 1, \mathrm{a} \oplus 2)(b, b \oplus 1, b \oplus 2)(c, c \oplus 1, c \oplus 2)$$
$$(d, d \oplus 1, d \oplus 2)(e, e \oplus 1, e \oplus 2)(f, f \oplus 1, f \oplus 2)$$
$$(g, g \oplus 1, g \oplus 2)(h, h \oplus 1, h \oplus 2)(i, i \oplus 1, i \oplus 2)$$

Для турнірів у 2-73 дні змагання

Узагальнене правило таке:

$$(a, \mathrm{a} \oplus 1, \underline{a} \oplus 2)(b, b \oplus 1, \underline{b} \oplus 2)(c, c \oplus 1, \underline{c} \oplus 2)$$
$$(d, d \oplus 1, \underline{d} \oplus 2)(e, e \oplus 1, \underline{e} \oplus 2)(f, f \oplus 1, \underline{f} \oplus 2)$$
$$(g, g \oplus 1, \underline{g} \oplus 2)(h, h \oplus 1, \underline{h} \oplus 2)(i, i \oplus 1, \underline{i} \oplus 2)$$

де $\underline{a}$ – це будь-яка інша група, окрім *a*.

Для турнірів у 74-217 дні змагання

$$(a, b, c)(\mathrm{a} \oplus 1, b \oplus 1, c \oplus 1)(\mathrm{a} \oplus 2, b \oplus 2, c \oplus 2)$$
$$(d, e, f)(d \oplus 1, e \oplus 1, f \oplus 1)(d \oplus 2, e \oplus 2, j \oplus 2)$$
$$(g, h, i)(g \oplus 1, h \oplus 1, i \oplus 1)(g \oplus 2, h \oplus 2, i \oplus 2)$$

Список використаних джерел:

1. Аксенов О., Рибак О. Застосування однієї графової теореми при розв’язуванні деяких задач // У світі математики. – 8 (2002). – № 3. – С. 55–58.

2. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 2002.

3. Рибак О. Ідеальні розбиття підмножин // У світі математики. – 10 (2004). – № 2. – С. 29–35.

4. Капитонова Ю.В., Кривой С.Л., Летичевский А.А. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.

5. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М., 1988. – 200 с.