Тарасенко С.А.
студент,
Науковий керівник: **Рибак О.В.**
кандидат фізико-математичних наук, старший викладач,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ТЕОРЕМА ШПЕРНЕРА

Було поставлено задачу довести теорему Шпернера для мультимножинного випадку, отримані результати наведено нижче. Для наглядності та цілісності картини, наведемо теорему Шпернера для випадку звичайної (не мультимножинного випадку) множини:

Антиланцюгом довжини k набір його підмножин $M_1, \ldots, M_k$, жодне з яких не міститься в іншій підмножині з цього набору $M_i \not\subset M_j$ *при* $i \neq j$.

Маємо набір підмножин $M_1, \ldots, M_k$ множини $\{1, \ldots, n\}$, відомо що

$\forall i, j$ $(i \neq j)$: $M_i \not\subset M_j$, тобто маємо *антиланцюг* довжини k.

Відомий, доведений Шпернером факт: $k \leq C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

Сформулюємо теорему Шпернера для мультимножинного випадку, і доведемо часткові випадки теореми спираючись на теорему Голла про паросполучення.

Теорема Шпернера Нехай дані кратності $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ входження елементів $1, \ldots, n$ у множину M, тобто $M = \{1^{\alpha_1}, \ldots, n^{\alpha_n}\}$, нехай допустимі такі мультипідмножини M_i:

1 – входить в M_i з кратністю $\leq \alpha_1$

2 – входить в M_i з кратністю $\leq \alpha_2$

…

І так далі.

Те саме питння: скільки максимум може бути $M_1, \ldots, M_k$, $\forall i, j (i \neq j)$: $M_i \nsubseteq M_j$

Ми кажемо, що $M_i \subseteq M_j$, якщо кратність входження кожного елемента M_j – не менша, ніж в M_i.

Аналогія з дільниками:

Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ ($p_1, \dots, p_n$ – прості). Розглянемо деякі натуральні дільники числа n, нехай це – $d_1, \dots, d_k$. Нехай вийшло так, що $\forall i, j \ (i \neq j)$: $d_i \nmid d_j$.

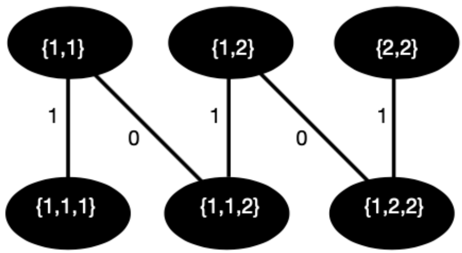
Показати, що $k \leq N([\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{2}])$, де $N(x)$ – кількість дільників числа n, яке складається рівно з x простих множників.

Підхід до рішення поставленої задачі

Нехай збудовано граф, в якому в верхній долі знаходяться всі мультимножини потужності x, а у нижній долі – потужності $x + 1$. Ребро будуємо тоді, коли верхня мультимножина включається в нижню. Оскільки в випадку зі звичайними множинами $deg_{top} = n - t$, $deg_{bottom} = t$. То в випадку з мультимножинами будемо зважувати граф проставленням відповідних вагових коефіцієнтів на ребрах для отримання аналогічного результату, тобто ми використовуємо факт, який безперечно доведено для немультимножинного випадку.

Розглянемо декілька прикладів:

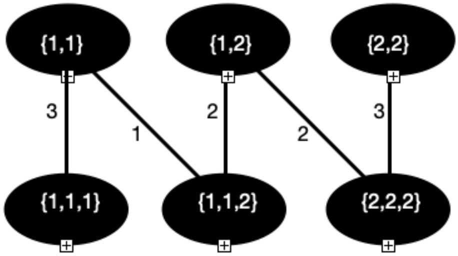
Приклад 1:



Нехай $M_1, \dots, M_k \subseteq \{1,1,1,2,2\}$, $x = 2$ (Тобто в верхній долі графу двоелементні множини, в нижній триелементні), будуємо граф:

$deg_{bottom} = deg_{top} = 1$.

Приклад 2:

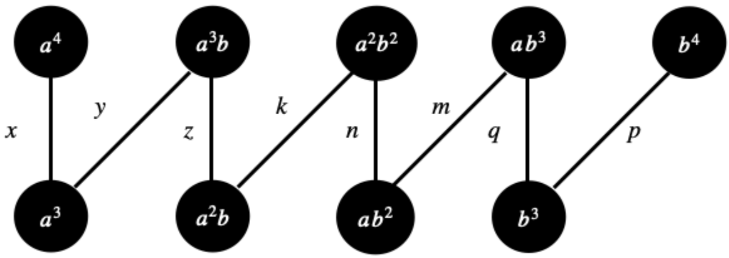


Нехай $M_1, .., M_k \subseteq \{1,1,1,2,2,2\}$, $x = 2$ (Тобто в верхній долі графу двоелементні множини, в нижній триелементні), будуємо граф:

$deg_{bottom} = 3deg_{top} = 4$.

Окремий випадок № 1

$M = \{a^n, b^m\}$ – мультимножина, яка складається з елементів a n та b, кратності n та m відповідно. Розглянемо підхід до вирішення задачі на прикладі множини $M = \{a^5, b^4\}$ (Перехід від 3-елементних до 4-елементних підмножин):



В верхній долі знаходяться мультипідмножини потужності 4, а у нижній долі мультипідмножини потужності 3, для того, щоб граф був зважений необхідно щоб $\underline{deg} = 4$, $deg\text{-} = 5$, а отже необхідно скласти систему лінійних рівнянь, маємо 6 рівнянь, та 6 невідомих, розв'яжемо систему рівнянь і отримаємо:

$$\{x = 4, x + y = 5, y + z = 4, z + k = 5, k + n = 4, n + m = 5, m + q = 4, p = 4$$

$$\{x = 4, y = 1, z = 3, k = 2, n = 2, m = 3, q = 1, p = 4$$

– отримали зважений граф

Узагальнемо цей підхід на множину $M = \{a^n, b^m\}$:
$\{x = y + z = k + n = m + q = p = 4\; x + y = z + k = n + m = p + q = 5$
Нехай: $\{x = 4\; x + y = 5$
Більш аналітично:
Узагальнемо цей підхід на множину $M = \{a^n, b^m\}$:

$$x = y + z = k + n = m + q = p = s(sum1)$$

$$x + y = z + k = n + m = p + q = t(sum2)$$

Розв'язавши систему рівнянь отримали: $5s = 4t\ (*)$, покладемо $s = 4, t = 5$ (Можемо взяти s будь-яким, інші значення будуть пропорційні, так як $s = \frac{4}{5}t$, зручно взяти $t = 5$, тоді $s = 4$. Аналогічну систему складемо у випадку неповного насичення графу.

Було розглянуто один тип мультимножин, а саме: $M = \{a^n, b^m\}$. Запропоновано спосіб доведення теореми Шпернера, доведено теорему для цього частинного випадку мультимножини, наведено приклади.

Список використаних джерел:

1. Капитонова Ю.В., Кривой С.Л., Летичевский А.А. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.
2. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М., 1988. – 200 с.
3. Эвнин А.Ю. Вокруг теоремы Холла (рус.) Математическое образование. – 2005.
4. Андерсон Ян. «Теорема Шпернера». Комбинаторика конечных множеств. Oxford University Press, 1987. С. 2–4.
5. Лубелл Д. «Короткое доказательство леммы Шпернера». Журнал комбинаторной теории. 1966. 299 с.
6. Doug Wiedemann A computation of the eighth Dedekind number // Order. – 1991. – Т. 8. – Вып. 1. – С. 5–6.
7. Kleitman D., Markowsky G. On Dedekind's problem: the number of isotone Boolean functions. II // Transactions of the American Mathematical Society. – 1975. – Т. 213. – С. 373–390.