ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Коровіцька Я.В.
студентка,
Волинський національний університет імені Лесі Українки

МОДУЛЬ НЕПЕРЕРВНОСТІ (ПЕРШОГО РОДУ)

Постановка проблеми. Завдяки теореми Вейєрштрасса бачимо, що для будь-якої неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$ має місце рівність: $\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0$. Чим більший степінь [2] гладкості функції, тим швидше $E_n(f)$ прямує до нуля. Неперервні функції f і g мають одну й ту саму кількість похідних або ж зовсім їх не мають, то для порівняння степенів їх гладкості будемо користуватися модулями неперервності, і вважати, що з двох функцій гладшою є та, модуль неперервності якої швидше прямує до нуля.

Мета роботи: дати означення модуля неперервності першого порядку, сформулювати його властивості та розглянути класи, які визначаються модулем неперервності.

Результати досліджень. Для неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$ назвемо модулем неперервності першого порядку [1] або ж просто модулем неперервності функцію $\omega(u) = \omega(f; u)$, означену на $[0, b - a]$ за допомогою наступної рівності:

$$\omega(f;u) = \sup_{\substack{a\le x\le b-h \\ 0\le h\le u}} |f(x+h) - f(x)|, \tag{1}$$

або

$$\omega(f;u) = \sup_{\substack{|x_2-x_1|\le u \\ x_1,x_2\in[a,b]}} |f(x_1) - f(x_2)|, \tag{1'}$$

Користуючись поняттям модуля неперервності, введемо такі класи функцій.

Означення 1. При кожному фіксованому $\alpha \in (0;1]$ класом Гельдера (або Ліпшиця) порядку α називається множина всіх неперервних функцій f, модуль неперервності кожної з яких задовольняє умові

$$\omega(f;u) \le Mu^{\alpha} \tag{1}$$

де M – будь-яка додатна стала, яка не залежить від u і яка, взагалі кажучи, є різною для різних функцій. Цей клас позначається H^{α}. Через MH^{α} позначається підклас усіх тих функцій з класу Гельдера (Ліпшиця) порядку α, для яких умова (1) виконується при одному і тому ж фіксованому значенні сталої M. Очевидно, що якщо $f(x) \in MH^{\alpha}$, то тоді тим більше $f(x) \in H^{\alpha}$.

Означення 2. Кажуть, що неперервна функція $f(x)$ задовольняє умові Діні-Ліпшиця, якщо

$$\omega(f;u) = o\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{u}}\right) \text{ при } u \to 0 \qquad (2)$$

Означення 3. Нехай $\omega(u)$ – будь-яка функція, що є модулем неперервності, і M – стала. Тоді через MH^{ω} позначимо клас усіх неперервних функцій f, для кожної з яких

$$\omega(f;u) \le M\,\omega(u), \qquad (3)$$

а через H^{ω} – множину всіх функцій, кожна з яких, при будь-якому M належить класу MH^{ω}. У множині диференційовних функцій важливу роль відіграють класи функцій, які визначаються в такий спосіб. **Властивості модуля неперервності:**

1. $\omega(0) = 0$;

2. $\omega(u)$ є функція, монотонно зростаюча;

3. $\omega(u)$ є функція неперервна;

4. $\omega(u)$ є функція напівадитивна в тому сенсі, що для будь-яких $u_1 \ge 0$ і $u_2 \ge 0$

$$\omega(u_1 + u_2) \le \omega(u_1) + \omega(u_2), \qquad (2)$$

Чотирма головними властивостями модуля неперервності модуль неперервності повністю визначається [1] в тому сенсі, що будь-яка функція, яка ними володіє, служить модулем неперервності для деякої неперервної функції, а саме, для самої себе: так що для такої функції.

Висновки. У цій роботі було розглянуто властивості і означення модуля неперервності, класи функцій, що визначаються першими модулями неперервності, які є не менш важливими в класі неперервних функцій.

Список використаних джерел:

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

2. Степанец А.И. Методы теории приближения. – К.: Ин-т. Математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 477 с.