

якщо  $k < 2k_4$ , тоді в рівнянні (2) відсутній коефіцієнт  $\int_{R^d} \bar{\Phi}(x, y) P_2(dy)$ ; та якщо  $k < k_3$ , тоді в рівнянні (2) відсутній коефіцієнт  $\int_{R^d} \bar{q}(x, y) P_1(dy)$ .

Досліджено граничну поведінку інтегрального функціоналу від розв'язку стохастичного диференціального рівняння, залежного від малого параметра з доданками, що містять процес Вінера, центровану і нецентровану міри Пуассона. Сформульовано і доведено теорему про властивості стохастичного процесу  $\eta_\varepsilon(t)$ , що залежить від малого параметра. Одержано різні види граничного процесу відносно порядку малості параметра.

### Список використаних джерел:

1. Deelstra G. and Delbaen F. Long-term return in stochastic interest rate models, Insurance: Mathematics and Economics, 17, (1995), 163-169.

**Степанець Ю.А.**

*молодший науковий співробітник;*

**Попенко В.Й.**

*старший науковий співробітник,*

*Науково-виробнича корпорація «Київський інститут автоматики»*

## ДИНАМІЧНЕ ПОЛЕ І РЕНТГЕНІВСЬКЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ АТОМІВ

Електрон внутрішньої оболонки атома розміщується в потенційній чарунці, що утворюється потенціалом ядра і сусідніх електронів, в точці рівно дії сил з боку ядра, і сил між електронної взаємодії  $F_{я,e} + F_{e,e} = 0$ . У зв'язку  $K$  електрона бере участь, також сила, обумовлена слабкою взаємодією його з протоном ядра [1]  $F_{я,e} + F_{e,e} + F_{с.в.} = 0$ .

Стороння збуджуюча дія може викликати зміщення електрона з місця рівно дії сил. Якщо енергія збуджуючої дії, не перевищує енергію зв'язку електрона у чарунці, електрон не зможе піти з неї і буде здійснювати коливання в її межах. Повертаючі сили, що діють на електрон в його коливаннях, радіального напрямку, тому вірогідніші радіальні коливання електрону. У деякому наближенні, коливання електрона можна рахувати гармонійними.

Динамічні складові радіальних коливань електрона амплітуда, швидкість і прискорення відповідно, рівні:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_m \cos(\omega t), v(t) = -r_m \omega \sin(\omega t) = v_m \sin(\omega t), \\ \dot{v}(t) &= -r_m \omega^2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1)$$

Частота динамічного поля електрона  $\Omega$  згідно (18), [1], залежить від квадрата швидкості його руху  $\Omega = \Omega_o \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$ .

При гармонійних коливаннях електрона  $v(t) = v_m \sin(\omega t)$ , частота динамічного поля є квадратичною функцією часу

$$\Omega = \Omega_o \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_m^2}{c^2} \sin^2 \omega t\right). \quad (2)$$

Перетворимо її, згідно, відомої тригонометричної формули

$$\Omega = \Omega_o + \omega_{v m} \sin^2 \omega t = \Omega_o + \omega_{v m} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \Omega_1 - \frac{1}{2} \omega_{v m} \cos 2\omega t, \quad (3)$$

де:  $\Omega_1 = \Omega_o + \frac{1}{2} \omega_{v m}$ ,  $\omega_{v m} = \frac{1}{2} \Omega_o \frac{v_m^2}{c^2}$  – максимум девіації частоти  $\Omega$ .

Частота  $\Omega$  є швидкість зміни фази коливань поля  $\phi(t)$  в часі  $\Omega = \frac{d\phi(t)}{dt}$ .

Поточне значення фази у момент часу  $t$  дорівнює інтегралу частоти

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_o^t \Omega dt = \int_o^t (\Omega_1 - \frac{1}{2} \omega_{v m} \cos 2\omega t) dt = \Omega_1 t - \frac{\omega_{v m}}{\omega} \sin 2\omega t = \\ &= \Omega_1 t - x \sin 2\omega t. \quad (4) \end{aligned}$$

Фаза коливань поля  $\phi(t)$  змінюється відносно  $\Omega_1 t$  по синусоїдальному закону, з частотою  $2\omega$  і амплітудою  $x$ , яка рівна відношенню максимальній девіації частоти  $\omega_{v m}$  до частоти коливань електрона  $\omega$

$$x = \frac{\omega_{v m}}{\omega}. \quad (5)$$

Залежність динамічного поля від часу  $\psi_E(t)$  з фазою (4) запишемо в наступному вигляді  $\psi_E(t) = \cos \phi(t) = \cos (\Omega_1 t - x \sin 2\omega t)$ .

Розкривши дужки по відомих тригонометричних формулах, отримаємо

$$\psi_E(t) = \cos \Omega_1 t \cdot \cos (x \sin 2\omega t) + \sin \Omega_1 t \cdot \sin(x \sin 2\omega t). \quad (6)$$

Складні функції  $\cos (x \sin 2\omega t)$  і  $\sin(x \sin 2\omega t)$  за допомогою функцій Бесселя можна розкласти в ряди Фур'є [2]

$$\begin{aligned} \cos(x \sin 2\omega t) &= J_o(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k2\omega t, \\ \sin(x \sin 2\omega t) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin (2k-1) 2\omega t, \end{aligned} \quad (7)$$

Ряди (7) істотно відрізняються від розкладання функцій  $f(x)$  з періодом  $2\pi$  у ряд Фур'є. Їх коефіцієнти при гармонійних складових є певні функції Бесселя  $k$ -го порядку  $J_k(x)$ , аргументу  $x$ . Інша відмінність їх те, що частота  $\omega$  у аргументі гармонік  $\cos 2k2\omega t$  и  $\sin (2k-1) 2\omega t$  не обов'язково має бути постійною, а може бути залежною від будь якого параметру [2]

$$\omega \neq const.; \omega = f(t, r). \quad (8)$$

Перемножуючи  $\cos \Omega_1 t$  і  $\cos 2k2\omega t$ , а, також  $\sin \Omega_1 t$  і  $\sin (2k-1) 2\omega t$ , згідно з правилами тригонометрії, залежність динамічного поля електрона від часу  $\psi_E(t)$ , запишемо у вигляді ряду Фур'є. Член з нулевим індексом  $J_o(x) \cos \Omega_1 t$ , можна внести під знак суми

$$\begin{aligned} \psi_E(t) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{0,5 J_o(x) \cos \Omega_1 t + J_{2k}(x) [\cos(\Omega_1 + 2k2\omega) t + \\ &+ \cos(\Omega_1 - 2k2\omega) t] + J_{2k-1}(x) [\sin(\Omega_1 + (2k-1)2\omega) t + \sin(\Omega_1 - \\ &(2k-1)2\omega) t]\} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{0,5 J_o(x) \cos \Omega_1 t + J_{k_n}(x) [\cos(\Omega_1 + k_n 2\omega) t + \\ &+ \cos(\Omega_1 - k_n 2\omega) t] + J_{k_p}(x) [\sin(\Omega_1 + k_p 2\omega) t + \sin(\Omega_1 - k_p 2\omega) t]\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Де:  $k_n = 2k$  – парні індекси,  $k_p = (2k-1)$  – не парні індекси,  $k = 1, 2, 3 \dots$

Амплітуди спектральних складових розкладання (9) пропорційні функціям Бесселя нульового  $J_o(x)$ , непарного  $J_{2k-1}(x)$  і парного  $J_{2k}$  порядків, аргумент, яких відношення  $x = \omega_{v m} / \omega$ , девіації частоти динамічного поля  $\omega_{v m}$ , до частоти  $\omega$  коливань електрона.

Із залежності функцій Бесселя  $J(x)$  від аргументу  $x$ , [3] витікає, що кількість гармонік динамічного поля залежить від величини аргументу.

При значенні аргументу близькому нулю, відмінна від нуля лише амплітуда функції Бесселя нульового порядку  $x \approx 0$ ;  $J_0 \approx 1$ . Функції вищих порядків, практично, дорівнюють нулю,  $J_{k>0} \approx 0$ . У Фур'є розкладанні (9) буде відмінна від нуля лише одна центральна гармонійна складова  $J_0 \cos \Omega_1 t = J_0 \cos (\Omega_0 + 0.5\omega_{vm})$ , зі спостережуваною частотою

$$\omega_c = 0.5\omega_{vm} = 0,25v_m^2/c^2. \quad (10)$$

При значенні аргументу  $x$  рівного 0.5, відмінні від нуля функції Бесселя нульового і першого порядку  $x \approx 0.5$ ;  $J_0 \approx 0.9$ ,  $J_1 \approx 0.38$ ;  $J_{k>1} \approx 0$ . До гармонійної складової  $J_0 \cos \Omega_1 t$  додадуться дві бічні гармоніки

$$J_1 \sin (\Omega_1 + 2\omega)t, J_1 \sin (\Omega_1 - 2\omega)t \quad (11)$$

При збільшенні аргументу  $x$  до значень близьких одиниці, зросте амплітуда функції Бесселя другого порядку,  $J_2 \approx 0.2$ . У розкладанні (9) додадуться ще дві бічні гармоніки

$$J_2 \cos (\Omega_1 + 4\omega)t, J_2 \cos (\Omega_1 - 4\omega)t. \quad (12)$$

Із збільшенням аргументу  $x$  до двох, зросте функція Бесселя третього порядку  $J_3 \approx 0.2$ , станеться додавання ще двох бічних гармонік

$$J_3 \sin (\Omega_1 + 6\omega)t, J_3 \sin (\Omega_1 - 6\omega)t. \quad (13)$$

При збільшенні аргументу  $x$  від 0 до 2, зростання числа гармонійних складових відбувається в наступному порядку 1, 3, 5, 7. Аргумент  $x$  можна представити твором відношення максимальної швидкості коливань електрона  $v_m = r_m \omega$  до швидкості світла і відношення амплітуди коливань електрона  $r_m$  до Комптонівської довжини хвилі.

$$x = \frac{\omega_{vm}}{\omega} = 0.5 \frac{v_m^2 \Omega_0}{c^2 \omega} = 0.5 \frac{v_m r_m \omega \Omega_0}{c^2 \omega} = 0.5 2\pi \frac{v_m r_m}{c \Lambda} = \pi \frac{v_m}{c} \cdot \frac{r_m}{\Lambda}. \quad (14)$$

Електрони внутрішніх оболонок атома розміщуються в потенційних чарунках [1], що утворюються потенціалом ядра і потенціалами навколишніх електронів. Їх коливання обмежуються відстанями між сусідніми до них електронними оболонками.

Розміри багато електронних атомів, перевершують розмір атома водню не більше двох разів, на прилад відношення радіусів радону  $R_{Rn}$ , з шістьма оболонками і гелію  $R_{He}$ , з двома оболонками не перевищує два (5), [1]. У грубій оцінці амплітуда коливань електронів внутрішніх оболонок багато менше першого Борівського радіусу електрона в атомі водню  $r_m \ll a_0 = \Lambda/2\pi$ .

Максимальна швидкість коливань електрона в атомі не перевищує швидкість світла, з коефіцієнтом постійної тонкої структури  $v_m \approx \alpha c$ .

Можливе значення аргументу (14),  $x \approx \pi \frac{v_m}{c} \cdot \frac{r_m}{\Lambda} \approx \pi \frac{\alpha c}{c} \cdot \frac{a_0}{\Lambda}$  для електронів внутрішніх оболонок складає  $0.5 < x < 5$ .

Відстані між електронними оболонками атомів, розміри потенційних чарунк і дозволені амплітуди коливань електронів  $r_m$  зростають із збільшенням номера оболонки  $r_{m1} \approx r_L - r_K < r_{m2} \approx r_M - r_L < r_{m3} \approx r_N - r_M < r_{m4} \approx r_O - r_N \dots$

Відповідно, із збільшенням номера оболонки і амплітуд коливань електронів, які дозволяються розміром чарунки, зростає число гармонік динамічного поля, що відповідають, згідно (11), (12), (13), амплітудам функцій Бесселя першого, другого і третього порядків.

Коливання електрона, згідно з електродинамікою, супроводжуються електромагнітним випромінюванням. Електрон випромінює на частоті коливань його власного динамічного поля  $\Omega$ .

Спостережувана частота випромінювання електрона, згідно (10), пропорційна квадрату швидкості його руху, тобто кінетичній енергії електрона

$$\omega_c = \Omega - \Omega_o = 0,5\Omega_o \frac{0,5v_m^2}{c^2} = 0,5\Omega_o \frac{W_k}{W_o}.$$

Кінетична енергія коливань електрона рівна енергії зв'язку електронів в атомі, або глибини потенційної чарунки. Величина її для внутрішніх оболонок атомів, за наближеною оцінкою, лежить в межах  $123980 \div 100$  еВ, що згідно (12), [4] відповідає діапазону спостережуваних частот рентгенівського випромінювання  $3 \cdot 10^{19} \div 2,4 \cdot 10^{16}$  гц.

Структура спектру, спостережуваних частот випромінювання електронів внутрішніх оболонок атома, згідно (10), (11), (12), (13) з числом 1,3,5,7 адекватна структурі рентгенівських спектрів атомів.

Ця відповідність просліджується експериментально в рентгенівських спектрах поглинання. Структура кордону рентгенівського спектру поглинання атомів з боку довгих хвиль для К серії однократна, для L серії три кратна, для M серії п'ятикратна і для серії N семи кратна.

Спектр рентгенівського випромінювання складається з декількох серій, кожна з яких відповідає певній електронній оболонці. Структура спектру конкретної серії однотипна. Із збільшенням атомного номера в кожній серії спостерігається монотонний зсув ліній у бік коротких хвиль, пропорційний квадрату зарядового числа атома. (3), [1]  $\omega_H \propto W_{(z)max} = z^2 W_H$ .

Відстань між серіями атома пропорційна різниці глибини потенційних чарунок електронних оболонок, або різниці енергії зв'язку електронів оболонок

$$\omega_{K\alpha} - \omega_{L\alpha} \propto U_K - U_L, \omega_{M\alpha} - \omega_{N\alpha} \propto U_M - U_N \dots$$

Функції Бесселя, згідно (9), служать коефіцієнтами амплітуд спектральних складових випромінювання  $E_k \propto J_k$ . Інтенсивність випромінювання  $I$  пропорційна квадрату амплітуди, і відповідно, квадрату функції Бесселя  $I_k \propto E_k^2 \propto J_k^2$ . Для аргументу  $x = 0.5, J_0^2 \approx 0.898, J_1^2 \approx 0.09, J_2^2 \approx 0.006$ , що до певної міри, адекватно інтенсивностям ліній  $I_{K\alpha}, I_{K\beta}, I_{K\gamma}$ .

У амплітуду випромінювання електрона

$$E \approx \theta_0 \frac{q(t) \dot{v}(t)}{c^2 r} f(\theta) = \theta_0 \frac{e \dot{v}_m}{c^2 r} f(\theta) \psi_E(t) \psi_v(t) \quad (15)$$

входить співмножником періодична функція прискорення коливань електрона  $\psi_v(t)$ , яка, в першому наближенні (1), розглядалась як гармонійна. Вона також може бути розкладена в ряд Фур'є

$$\dot{v}(t) = v_m \psi_{\dot{v}}(t) = v_m \cdot (a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)). \quad (16)$$

Спектр випромінювання атомів є результатом твору двох рядів Фур'є, що, можливо, і визначає серіальну структуру їх рентгенівських спектрів.

На закінчення слід сказати, що спостережуваний рентгенівський спектр випромінювання атомів, може мати не тільки квантове пояснення, але, при динамічному представленні поля електрона, також і класичне, яке викладене в тезах.

### Список використаних джерел:

1. Попенко В. Й. Багато електронні атоми. Тези для наукової конференції «Актуальні питання гуманітарних та природничих наук» 2015.
2. Романовський П. И. Ряди Фур'є. Теорія поля. Аналітичні і спеціальні функції. Перетворювання Лапласа. Видавництво «Наука», 1973.
3. Корн Г. і Корн Т. Довідник по математиці для наукових працівників і інженерів. – Видавництво «Наука», 1973.
4. Попенко В. И. Динамічне поле електрона. Тези для наукової конференції «Актуальні питання сучасної науки», 2014.
5. Джексон Дж. Класична електродинаміка, М. «Світ», 1965.

**Степанець Ю.А.**

*молодший науковий співробітник;*

**Попенко В.Й.**

*старший науковий співробітник,*

*Науково-виробнича корпорація «Київський інститут автоматики»*

## ДИНАМІЧНЕ ПОЛЕ І ОПТИЧНЕ ВІПРОМІНЮВАННЯ АТОМІВ

Валентні електрони атомів розташовуються в потенційній ямі атомного залишку [1]. Потенційна яма не симетрична в радіальному перетині. Внутрішня стінка її, обмежена електронами попереднього шару, крута. Зовнішня стінка, визначується кулонівським потенціалом ядра, що убуває пропорційно  $r^{-1}$ , полога, відкрита для радіальних коливань електрона.

Енергія зв'язку валентних електронів 3.88 – 24.45 еВ, згідно (12), [2] відповідає спостережуваним частотам оптичного і ультрафіолетового діапазону.

На відстанях  $\infty \geq r \geq r_0$  енергія взаємодії електрона з ядром атома водню змінюється обернено пропорційно до відстані від 0 на нескінченності до –13,6 еВ на відстані  $r_0 = 2\ell$ , [3].

Падаючи на ядро з нескінченності, з нульовою початковою швидкістю, в точці максимальної глибини потенційної ями  $U = -13,6$ , в Кулонівському потенціалі ядра електрон придбає кінетичну енергію  $W_k = 13,6$  еВ. Швидкість електрона буде рівняти  $v = (2W_k/m)^{0,5} = ac$ .

На ділянці  $2\ell \leq r \leq \ell$ , з різким підвищенням потенціалу  $-13,6 \leq U \leq 0$ , [3] відбудеться гальмування електрона. Вважаючи, що гальмування буде з постійним прискоренням, запишемо  $\ell = 0,5vt$ , звідки  $t = \ell/0,5v = \ell/0,5ac$ . Прискорення гальмування буде рівне  $\dot{v} = v/t = ac/t = 0,5a^2c^2/\ell$ .