ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Деркач А.И.
студент,
Национальный авиационный университет

ПАРАДОКС МОНТИ ХОЛЛА КАК СПОСОБ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями – козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где – козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Парадокс Монти Холла. Парадокс Монти Холла – одна из известных задач теории вероятностей, решение которой, на первый взгляд, противоречит здравому смыслу.

В поисках автомобиля игрок выбирает дверь 1. Тогда ведущий открывает 3-ю дверь, за которой находится коза, и предлагает игроку изменить свой выбор на дверь 2. Стоит ли ему это делать?

Задача формулируется как описание гипотетической игры, основанной на американском телешоу «Let’s Make a Deal», и названа в честь ведущего этой передачи. Наиболее распространенная формулировка этой задачи, опубликованная в 1990 году в журнале Parade Magazine, звучит следующим образом:

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями – козы. Вы выбираете одну из

дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где – козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

После публикации немедленно выяснилось, что задачка сформулирована некорректно: не все условия обговорены. Например, ведущий может предлагать сменить выбор тогда и только тогда, когда игрок первым ходом выбрал автомобиль. Очевидно, что смена первоначального выбора будет вести в такой ситуации к гарантированному проигрышу. При решении этой задачи обычно рассуждают примерно так: ведущий всегда в итоге убирает одну проигрышную дверь, и тогда вероятности появления автомобиля за двумя не открытыми становятся равны 1/2, вне зависимости от первоначального выбора.

На самом деле вероятность того, что изначально была выбрана дверь, скрывающая козла, равна 66% (2/3). И это никак не связано с тем, что ведущий открыл дверь; козёл выбран с вероятностью 66% (2/3). Следовательно, смена выбранной двери обеспечит 66-процентную (2/3) вероятность выбора автомобиля.

Этот вывод противоречит интуитивному восприятию ситуации большинством людей, поэтому описанная задача и называется парадоксом Монти Холла, т.е. парадоксом в бытовом смысле.

Увеличение количества дверей. Для того, чтобы легче понять суть происходящего, можно рассмотреть случай, когда игрок видит перед собой не три двери, а, например, сто. При этом за одной из дверей находится автомобиль, а за остальными 99 – козы. Игрок выбирает одну из дверей, при этом в 99% случаев он выберет дверь с козой, а шансы сразу выбрать дверь с автомобилем очень малы – они составляют 1%. После этого ведущий открывает 98 дверей с козами и предлагает игроку выбрать оставшуюся дверь. При этом в 99% случаев автомобиль будет находиться за этой оставшейся дверью, поскольку шансы на то, что игрок сразу выбрал правильную дверь, очень малы. Понятно, что в этой ситуации рационально мыслящий игрок должен всегда принимать предложение ведущего.

При рассмотрении увеличенного количества дверей нередко возникает вопрос: если в оригинальной задаче ведущий открывает одну дверь из трёх (то есть 1/3 от общего количества дверей), то почему нужно предполагать, что в случае 100 дверей ведущий откроет 98 дверей с козами, а не 33? Это соображение является обычно одной из существенных причин того, почему парадокс Монти Холла входит в противоречие с интуитивным восприятием ситуации. Предполагать открытие 98 дверей будет правильным потому, что существенным условием задачи является наличие только одного альтернативного варианта выбора для игрока, который и предлагается ведущим. Поэтому для того, чтобы задачи были аналогичными, в случае 4 дверей ведущий должен открывать 2 двери, в случае 5 дверей – 3, и так далее, чтобы всегда оставалась одна неоткрытая дверь кроме той, которую изначально выбрал игрок. Если ведущий будет открывать меньшее количество дверей, то задача уже не будет аналогична оригинальной задаче Монти Холла.

Следует отметить, что в случае множества дверей, даже если ведущий будет оставлять закрытой не одну дверь, а несколько, и предлагать игроку выбрать одну из них, то при смене первоначального выбора шансы игрока выиграть автомобиль всё равно будут увеличиваться, хотя и не столь значительно. Например, рассмотрим ситуацию, когда игрок выбирает одну дверь из ста, и затем ведущий открывает только одну дверь из оставшихся, предлагая игроку изменить свой выбор. При этом шансы на то, что автомобиль находится за первоначально выбранной игроком дверью, остаются прежними –

1/100, а для остальных дверей шансы изменяются: суммарная вероятность того, что автомобиль находится за одной из оставшихся дверей (99/100) распределяется теперь не на 99 дверей, а на 98. Поэтому вероятность нахождения автомобиля за каждой из этих дверей будет равна не 1/100, а 99/9800. Прирост вероятности составит примерно 0,01%.

Статистика шоу Монти Холла. Однако за всё время существования телешоу Монти Холла люди, менявшие решение, действительно выигрывали вдвое чаще.

Из 30 игроков, поменявших первоначальное решение, Кадиллак выиграли 18 – то есть 60%. Из 30 игроков, которые остались при своём выборе, Кадиллак выиграли 11 – то есть примерно 36%.

Так что приведённые в решении рассуждения, какими бы нелогичными они не казались, подтверждаются практикой.

Математическое обоснование парадокса Монти Холла. Итак, пусть Bi (box i) – приз в коробке под номером i.

P (B1) = P (B2) = P (B3) = 1/3.

Назовем событие, когда ведущий открывает пустой ящик – O (open).

{B1, B2, B3} – полное распределение несовместных событий, значит, мы можем применить формулу полной вероятности и теорему Байеса.

P (O) = P (O|B1) * P (B1) + P (O|B2) + P (O|B3).

O|B1 – это обозначение случая, когда ведущий открыл вторую коробку, а приз – в первой. Раз приз в первой коробке (другими словами – в той, которую выбрал игрок), ведущий может выбирать, какую коробку ему открыть. Он может одинаково легко открыть как вторую, так и третью, то есть вероятность этого события равна 50%. Так и запишем:

P (O|B1) = 1/2.

O|B2 – случай, когда приз во второй коробке, иными словами – в той которой лежит приз. Это против правил и сломало бы всю

игру, значит P (O|B2) = 0.

O|B3 – случай, когда приз в третьей коробке. Первую коробку уже выбрал игрок, коробку с призом ведущий открывать не станет, и ему не остается другого выбора, кроме как открыть вторую коробку (ту самую, которую он и открыл), поэтому

P (O|B3) = 1.

Подставим значения в формулу:

P (O) = 1/2 * 1/3 + 0 * 1/3 + 1 * 1/3 = 1/2.

По теореме Байеса:

P (B1|O)=P (O|H1)*P (H1)/P (O)= (1/2*1/3)/ (1/2)= 1/3.

P (B2|O) = 0 – это очевидно, P (B1|O) + P (B2|O) + P (B3|O) = 1 (так как распределение B полное и несовместное), значит P (B3|O) = 1 – P (B1|O) = 2/3.

Результаты симуляции. Также была проведена симуляция парадокса Монти Холла (с помощью программы, адрес которой приведен в списке литературы под 4 пунктом) и были получены такие результаты:

Выполнено: 1000 итераций.

Вероятности выиграть:
стратегия 1 (не менять выбор) ≈ 36%.
стратегия 2 (изменить выбор) ≈ 64%.

Вывод. Таким образом, участнику следует изменить свой первоначальный выбор – в этом случае вероятность его выигрыша будет равна 2⁄3 Этот вывод противоречит интуитивному восприятию ситуации большинством людей, поэтому описанная задача и называется парадоксом Монти Холла, то есть парадоксом в бытовом смысле.

А интуитивное восприятие таково: открывая дверь с козой, ведущий ставит перед игроком новую задачу, как бы никак не связанную с предыдущим выбором – ведь коза за открытой дверью окажется независимо от того, выбрал игрок перед этим козу или автомобиль. После того, как третья дверь открыта, игроку предстоит сделать выбор заново – и выбрать либо ту же дверь, которую он выбрал раньше, либо другую. То есть, при этом он не меняет свой предыдущий выбор, а делает новый. Математическое же решение рассматривает две последовательные задачи ведущего, как связанные друг с другом.

Список использованных источников:

1. [http://ru.wikipedia.org/wiki/ПарадоксМонтиХолла]
2. [http://elementy.ru/problems/23]
3. [http://stalker.od.ua/blog/?go=all/paradoks-monti-holla/]
4. [http://bodyonov.ru/projects/monty-hall-demo/]

Коляденко В.А.

аспірант кафедри фізики енергетичних систем,
Фізико-технічний інститут
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут»

ЕКСИТОН-ПОЛЯРИТОННІ СОЛІТОНИ: ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ СХЕМИ І МОДЕЛЮВАННЯ

В даний час все більше робіт по нелінійній оптиці досліджують екситон-поляритони. Це колективні збудження (квазічастинки), що є суперпозицією фотона (світла) та екситона (речовини). Одним з яскравих прикладів таких поляритонів є екситонні поляритони в напівпровідникових мікрорезонаторах, що працюють в режимі сильного зв’язку. В останні кілька років численні дослідження поляритонів у мікрорезонаторах були в значній мірі мотивовані можливістю вивчення бозе-ейнштейнівської конденсації і надплинності. Для різних робочих температур використовують резонатори із різних речовин. Для температури близько 10 K можна використовувати структури типу AlGaAs, InGaAs та інші. Резонатори на основі GaN та ZnO можна використовувати при