УДК 519.86

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ РАВНОВЕСИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕГИОНА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЕГО СУЩЕСТВОВАНИЯ

Косенкова М.В.
Кемеровский государственный университет

Исследована математическая модель функционирования образовательной системы региона в виде многокритериальной задачи оптимального управления, определено понятие равновесия этой системы, сформулированы и доказаны необходимые условия его существования.

Ключевые слова: математическое моделирование, система образования, оптимальное управление, многокритериальная оптимизация, равновесие.

Постановка проблемы. Математическое моделирование является мощным инструментом научного познания, позволяющим охватить все аспекты проблемы с помощью формального математического аппарата. Одним из актуальных направлений использования математических моделей является анализ функционирования образовательных учреждений и систем образования и выработка путей их оптимизации. При этом изучаются как частные вопросы, так и выбор стратегических направлений развития системы образования в целом с учетом социально-экономических факторов и региональных особенностей.

Анализ последних исследований и публикаций. Широкое распро-странение получили модели формирования учебных групп и прогнозирования числа учащихся, переходящих из одной образовательной категории в другую, имитационные модели планирования учебной работы и др. [3].

В Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН с 1995 года ведутся работы над структурными моделями, показывающими, как будет меняться общая эффективность системы образования. В статье [1] на базе этих исследований обсуждается проблема экономического анализа роли высшей школы в создании инновационной среды в России.

Козловым А. Н. разработана комплексная модель оценки качества деятельности ВУЗа на основании нейросетевого подхода, компетентностного подхода и системы сбалансированных показателей [4].

Сотрудниками Центра бюджетного мониторинга Петрозаводского государственного университета были разработаны алгоритмы и математические модели макроэкономической методики прогнозирования потребностей экономики в квалифицированных кадрах [6].

В статье Добрыниной Н. Ф. построена и исследована математическая модель распространения знаний и управления процессом обучения в студенческой среде с учетом уровня квалификации преподавателей [2].

В предыдущих работах автора предлагаемой статьи исследовалось моделирование процесса перехода обучающихся с одной образовательной ступени на другую и функционирование системы регионального образования в Российской Федерации в виде задачи оптимального управления (см., напр., [5]).

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы. Математическому моделированию проблем образования посвящено большое число публикаций, однако многие вопросы, такие как прогнозирование характеристик системы образования, определение оптимальных параметров ее функционирования и путей перехода к ним и пр., по-прежнему остаются не решенными.

Цель статьи. В данной статье исследуется математическая модель функционирования образовательной системы (ОС) российского региона в виде многокритериальной задачи оптимального управления [5]. Целью работы является определение понятия равновесия в рассматриваемой системе, формулировка и доказательство необходимых условий его существования.

Изложение основного материала. ***Описание модели.*** При моделировании ОС население было разбито на классы по сочетанию значений двух признаков: тип образовательного учреждения (ОУ), укрупненные группы специальностей (УГС) в РФ. В результате получились следующие группы: среднее общее образование (СОО), начальное специальное образование (НПО), среднее специальное образование (СПО), высшее образование (ВПО). На каждой ступени обучения были отделены первый и последний (выпускной) годы обучения. Дополнительно была выделена группа людей, не участвующих в процессе обучения. В результате, окончательно по типам ОУ и продолжительности обучения получилось 29 классов.

По типу УГС было определено 28 значений и введено нулевое значение для учащихся школ и лиц, не участвующие в процессе обучения.

Изменение численности учащихся разных ступней обучения представляется уравнениями следующего вида:

$$x_i^s(t) = x_i^s(t-1) + \sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{rs} \sum_{k=1}^{l} \eta_{jik}^{sr} u_k(t) - \sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{sr} \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t) + \gamma_i^s y(t), \quad (1)$$

где $m=29$ – общее количество классов, $e=29$ – количество специальностей, $x_i^s(t)$ – численность объектов в классе R_i на специальности s в момент времени t; $u(t)=(u_1(t),...,u_1(t))$ – вектор, координаты которого представляют собой инвестиции в соответствующую сферу финансирования; $\sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t)$ – численность объектов класса R_j специальности s, переходящих в момент времени t в класс R_j специальности r, $i, j = 1,...,m, s, r = 1,...,e$; a_{ij}^{sr} – элемент, значение которого равно 1, если возможен переход из класса i в класс j со специальности s на r, иначе 0;

$$\gamma_i^s = \begin{cases} 1, \text{если } i = 29, \\ 0, \text{если } i = 1,...,28, \end{cases}, i = 1,...,m, s = 1,...,e, t = 1,...,T.$$

В момент $t=0$ зафиксировано начальное число объектов в классах x_i^{s0}:

$$x_i^s(0) = x_i^{s0}, \quad i = 1,...,m, s = 1,...,e. \quad (2)$$

Предполагается, что

$$\alpha_i^s(t) \le x_i^s(t) \le \beta_i^s(t), \ t = 1,...,T, i = 1,...,m, s = 1,...,e,, \quad (3)$$

где $\alpha_i^s(t), \beta_i^s(t)$ – границы численности класса R_i по специальности s.

Из каждого класса не может выйти объектов больше, чем в нем имеется:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \sum_{r=1}^{e} \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t) \le x_i^s(t-1), \quad t=1,\dots,T, \quad i=1,\dots,m, s=1,\dots,e. \qquad (4)$$

Так как численность объектов, переходящих из класса R_i специальности s в класс R_j специальности r, не может быть отрицательной, то

$$\sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t) \ge 0, \; i,j=1,\dots,m, \; s,r=1,\dots,e, \; t=1,\dots,T. \qquad (5)$$

Ограничение на количество денежных средств, выделяемых на каждую из сфер финансирования, в момент времени t записывается системой неравенств:

$$0 \le u_k(t) \le \delta_k(t), \; k=1,\dots,l, \; t=1,\dots,T, \qquad (6)$$

В качестве первого критерия эффективности введем максимизацию доли выпускников, трудоустроенных по специальности, для каждого типа ОУ:

$$J_1(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{e} \left(\sum_{k=1}^{l} \eta_{6\,29k}^{ss} u_k(t) + \sum_{k=1}^{l} \eta_{9\,29k}^{ss} u_k(t) - W_1^s(u(t)) \right)^2 \to \min. \qquad (7)$$

$$J_2(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{e} \left(\sum_{k=1}^{l} \eta_{11\,29k}^{ss} u_k(t) + \sum_{k=1}^{l} \eta_{14\,29k}^{ss} u_k(t) + \sum_{k=1}^{l} \eta_{17\,29k}^{ss} u_k(t) - W_2^s(u(t)) \right)^2 \to \min. \qquad (8)$$

$$J_3(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{e} \left(\sum_{k=1}^{l} \eta_{20\,29k}^{ss} u_k(t) + \sum_{k=1}^{l} \eta_{23\,29k}^{ss} u_k(t) + \sum_{k=1}^{l} \eta_{25\,29k}^{ss} u_k(t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{l} \eta_{28\,29k}^{ss} u_k(t) - W_3^s(u(t)) \right)^2 \to \min, \qquad (9)$$

где $W_1^r(u(t))$, $W_2^r(u(t))$, $W_3^r(u(t))$ — количества вакантных мест для выпускников НПО, СПО и ВПО по специальности r в году t соответственно.

Еще одним видом критерия будет максимизация числа выпускников:

$$J_4(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{e} \sum_{k=1}^{l} \left(\eta_{6\,29k}^{ss} u_k(t) + \eta_{9\,29k}^{ss} u_k(t) \right) \to \max, \qquad (10)$$

$$J_5(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{e} \sum_{k=1}^{l} \left(\eta_{11\,29k}^{ss} u_k(t) + \eta_{14\,29k}^{ss} u_k(t) + \eta_{17\,29k}^{ss} u_k(t) \right) \to \max, \qquad (11)$$

$$J_6(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{e} \sum_{k=1}^{l} \left(\eta_{20\,29k}^{ss} u_k(t) + \eta_{23\,29k}^{ss} u_k(t) + \eta_{25\,29k}^{ss} u_k(t) + \eta_{28\,29k}^{ss} u_k(t) \right) \to \max. \qquad (12)$$

Следующий критерий отражает условие экономии денежных средств:

$$J_7(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{l} \left(u_k(t) \right) \to \min. \qquad (13)$$

В итоге получается многокритериальная задача оптимального управления с уравнением движения (1), начальными условиями (2), ограничениями на управления (4)−(6) и на фазовые переменные (3), критериями качества (7)−(13).

Для решения многокритериальной задачи (1) − (13) применим описанный в [5] метод свертки, который позволяет в зависимости от выбранных весовых коэффициентов учитывать и задавать степень значимости критериев задачи. Функцию свертки в задаче (1) − (13) запишем следующим образом:

$$J(x^0,u) = \lambda_1 \cdot J_1(x^0,u) + \lambda_2 \cdot J_2(x^0,u) + \lambda_3 \cdot J_3(x^0,u) +$$
$$+ \lambda_4 \cdot (-J_4(x^0,u)) + \lambda_5 \cdot (-J_5(x^0,u)) + \lambda_6 \cdot (-J_6(x^0,u)) + \lambda_7 \cdot J_7(x^0,u) \to \min, \qquad (14)$$

где $0 < \lambda_i < 1, i=1,\dots,7, \sum_{i=1}^{7} \lambda_i = 1.$

Тогда под оптимальным решением в задаче (1) − (13) будем понимать управление $u^*(\cdot) = \{u^*(1),\dots,u^*(T)\}$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot) = \{x^*(0)\; x^*(1),\dots,x^*(T)\}$ системы (1) − (2), удовлетворяющие условиям (3) − (6) и минимизирующие свертку критериев (14).

Определение понятия равновесия. При исследовании ОС важную роль играют равновесные режимы ее функционирования, когда отдельные компоненты определенным образом сбалансированы друг по отношению к другу.

Выдвигаемые ниже требования для определения понятия равновесия являются достаточно жесткими и трудно осуществимыми на практике, поэтому зададим для них возможность отклонения от строгих равенств через коэффициенты μ_1^0, μ_2^0, μ_i^s, μ_{14}, i=3,...,13, s=1,...,28.

Сформулируем условия равновесия для задачи (1) − (6), (14):

1. Количество учащихся, поступивших в ОУ, должно по истечении установленного срока быть равно количеству выпускников (s=1,...,28.):

$x_3^0(t) = \mu_1^0 x_1^0(t-8),$	(15)	$x_5^0(t) = \mu_2^0 x_4^0(t-1),$	(16)
$x_9^s(t) = \mu_3^s x_7^s(t-2),$	(17)	$x_{11}^s(t) = \mu_4^s x_{10}^s(t-1),$	(18)
$x_{14}^s(t) = \mu_5^s x_{12}^s(t-2),$	(19)	$x_{17}^s(t) = \mu_6^s x_{15}^s(t-3),$	(20)
$x_{20}^s(t) = \mu_7^s x_{18}^s(t-4),$	(21)	$x_{23}^s(t) = \mu_8^s x_{21}^s(t-3),$	(22)
$x_{25}^s(t) = \mu_9^s x_{24}^s(t-1),$	(23)	$x_{28}^s(t) = \mu_{10}^s x_{26}^s(t-2).$	(24)

2. Все выпускники СОО должны поступить в учреждения НПО, СПО или ВПО:

$$\sum_{s=1}^{28} \left(x_6^s(t) + x_7^s(t) + x_{10}^s(t) + x_{12}^s(t) + x_{15}^s(t) + x_{18}^s(t) + x_{21}^s(t) \right) =$$
$$= \mu_{14} \left(x_3^0(t-1) + x_5^0(t-1) \right). \qquad (25)$$

3. Число выпускников ОУ по каждой специальности должно быть равно количеству вакантных мест для всех уровней образования:

$$x_6^s(t) + x_9^s(t) = \mu_{11}^s W_1^s(t), s=1,\dots,28, \qquad (26)$$

$$x_{11}^s(t) + x_{14}^s(t) + x_{17}^s(t) = \mu_{12}^s W_2^s(t), s=1,\dots,28, \qquad (27)$$

$$x_{20}^s(t) + x_{23}^s(t) + x_{25}^s(t) + x_{28}^s(t) = \mu_{13}^s W_3^s(t), s=1,\dots,28. \qquad (28)$$

В результате получается система ограничений (15) − (28) дополняющих модель (1) − (6), (14) и позволяющих проанализировать функционирование ОС региона с точки зрения равновесности ее развития.

Определение 1. Оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$ задачи (1)−(6), (14), вдоль которой выполняются условия (15) − (28) назовем равновесной траекторией.

Исследование условий существования равновесия. При помощи уравнения движения (1) условия (15) − (28) запишем следующим образом:

$$x_3^0(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j3}^{r0} \eta_{j3k}^{r0} - a_{3j}^{0r} \eta_{3jk}^{0r} \right) \right) u_k(\tau) \right] =$$
$$= \mu_1^0 \left(x_1^0(0) + \sum_{\tau=1}^{t-8} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j1}^{r0} \eta_{j1k}^{r0} - a_{1j}^{0r} \eta_{1jk}^{0r} \right) \right) u_k(\tau) \right] \right). \qquad (29)$$

$$x_5^0(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j5}^{r0} \eta_{j5k}^{r0} - a_{5j}^{0r} \eta_{5jk}^{0r} \right) \right) u_k(\tau) \right] =$$
$$= \mu_2^0 \left(x_4^0(0) + \sum_{\tau=1}^{t-1} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j4}^{r0} \eta_{j4k}^{r0} - a_{4j}^{0r} \eta_{4jk}^{0r} \right) \right) u_k(\tau) \right] \right), \qquad (30)$$

$$x_9^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j9}^{rs} \eta_{j9k}^{rs} - a_{9j}^{sr} \eta_{9jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] =$$
$$= \mu_3^s \left(x_7^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t-2} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j7}^{rs} \eta_{j7k}^{rs} - a_{7j}^{sr} \eta_{7jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] \right), \qquad (31)$$

$$x_{11}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j11}^{rs} \eta_{j11k}^{rs} - a_{11j}^{sr} \eta_{11jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] =$$
$$= \mu_4^s \left(x_{10}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t-1} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j10}^{rs} \eta_{j10k}^{rs} - a_{10j}^{sr} \eta_{10jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] \right), \qquad (32)$$

$$x_{14}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j14}^{rs} \eta_{j14k}^{rs} - a_{14j}^{sr} \eta_{14jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] =$$
$$= \mu_5^s \left(x_{12}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t-2} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j12}^{rs} \eta_{j12k}^{rs} - a_{12j}^{sr} \eta_{12jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] \right), \qquad (33)$$

$$x_{17}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j17}^{rs} \eta_{j17k}^{rs} - a_{17j}^{sr} \eta_{17jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] =$$
$$= \mu_6^s \left(x_{15}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t-3} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j15}^{rs} \eta_{j15k}^{rs} - a_{15j}^{sr} \eta_{15jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] \right), \qquad (34)$$

$$x_{20}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j20}^{rs} \eta_{j20k}^{rs} - a_{20j}^{sr} \eta_{20jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] =$$
$$= \mu_7^s \left(x_{18}^s(0) + \sum_{\tau=1}^{t-4} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j18}^{rs} \eta_{j18k}^{rs} - a_{18j}^{sr} \eta_{18jk}^{sr} \right) \right) u_k(\tau) \right] \right), \qquad (35)$$

$$x_{23}^{s}(0)+\sum_{\tau=1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{j23}^{rs}\eta_{j23k}^{rs}-a_{23j}^{sr}\eta_{23jk}^{sr}\right)\right)u_k(\tau)\right]=$$
$$=\mu_8^{s}\left(x_{21}^{s}(0)+\sum_{\tau=1}^{t-3}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{j21}^{rs}\eta_{j21k}^{rs}-a_{21j}^{sr}\eta_{21jk}^{sr}\right)\right)u_k(\tau)\right]\right), \tag{36}$$

$$x_{25}^{s}(0)+\sum_{\tau=1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{j25}^{rs}\eta_{j25k}^{rs}-a_{25j}^{sr}\eta_{25jk}^{sr}\right)\right)u_k(\tau)\right]=$$
$$=\mu_9^{s}\left(x_{24}^{s}(0)+\sum_{\tau=1}^{t-1}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{j24}^{rs}\eta_{j24k}^{rs}-a_{24j}^{sr}\eta_{24jk}^{sr}\right)\right)u_k(\tau)\right]\right), \tag{37}$$

$$x_{28}^{s}(0)+\sum_{\tau=1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{j28}^{rs}\eta_{j28k}^{rs}-a_{28j}^{sr}\eta_{28jk}^{sr}\right)\right)u_k(\tau)\right]=$$
$$=\mu_{10}^{s}\left(x_{26}^{s}(0)+\sum_{\tau=1}^{t-2}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{j26}^{rs}\eta_{j26k}^{rs}-a_{26j}^{sr}\eta_{26jk}^{sr}\right)\right)u_k(\tau)\right]\right), \tag{38}$$

$$\sum_{s=1}^{28}\left(\begin{gathered}x_6^s(0)+x_7^s(0)+x_{10}^s(0)+x_{12}^s(0)+x_{15}^s(0)+x_{18}^s(0)+x_{21}^s(0)+\\ +\sum_{\tau=1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(\begin{gathered}a_{j6}^{rs}\eta_{j6k}^{rs}-a_{6j}^{sr}\eta_{6jk}^{sr}+a_{j7}^{rs}\eta_{j7k}^{rs}-a_{7j}^{sr}\eta_{7jk}^{sr}+\\ +a_{j10}^{rs}\eta_{j10k}^{rs}-a_{10j}^{sr}\eta_{10jk}^{sr}+a_{j12}^{rs}\eta_{j12k}^{rs}-a_{12j}^{sr}\eta_{12jk}^{sr}+\\ +a_{j15}^{rs}\eta_{j15k}^{rs}-a_{15j}^{sr}\eta_{15jk}^{sr}+a_{j18}^{rs}\eta_{j18k}^{rs}-a_{18j}^{sr}\eta_{18jk}^{sr}+\\ +a_{j21}^{rs}\eta_{j21k}^{rs}-a_{21j}^{sr}\eta_{21jk}^{sr}\end{gathered}\right)\right)u_k(\tau)\right]\end{gathered}\right)= \tag{39}$$
$$=\mu_{11}\left(x_3^0(0)+x_5^0(0)+\sum_{\tau=1}^{t-1}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{j3}^{r0}\eta_{j3k}^{r0}-a_{3j}^{0r}\eta_{3jk}^{0r}+a_{j5}^{r0}\eta_{j5k}^{r0}-a_{5j}^{0r}\eta_{5jk}^{0r}\right)\right)u_k(\tau)\right]\right),$$

$$x_6^s(0)+x_9^s(0)+\sum_{\tau=1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(\begin{gathered}a_{j6}^{rs}\eta_{j6k}^{rs}-a_{6j}^{sr}\eta_{6jk}^{sr}+\\ +a_{j9}^{rs}\eta_{j9k}^{rs}-a_{9j}^{sr}\eta_{9jk}^{sr}\end{gathered}\right)\right)u_k(\tau)\right]=W_1^s(u(t)), \tag{40}$$

$$x_{11}^s(0)+x_{14}^s(0)+x_{17}^s(0)+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(\begin{gathered}a_{j11}^{rs}\eta_{j11k}^{rs}-a_{11j}^{sr}\eta_{11jk}^{sr}+a_{j14}^{rs}\eta_{j14k}^{rs}-a_{14j}^{sr}\eta_{14jk}^{sr}+\\ +a_{j17}^{rs}\eta_{j17k}^{rs}-a_{17j}^{sr}\eta_{17jk}^{sr}\end{gathered}\right)\right)u_k(\tau)\right]=W_2^s(u(t)), \tag{41}$$

$$x_{20}^s(0)+x_{23}^s(0)+x_{25}^s(0)+x_{28}^s(0)+$$
$$+\sum_{\tau=1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(\begin{gathered}a_{j20}^{rs}\eta_{j20k}^{rs}-a_{20j}^{sr}\eta_{20jk}^{sr}+a_{j23}^{rs}\eta_{j23k}^{rs}-a_{23j}^{sr}\eta_{23jk}^{sr}+\\ +a_{j25}^{rs}\eta_{j25k}^{rs}-a_{25j}^{sr}\eta_{25jk}^{sr}+a_{j28}^{rs}\eta_{j28k}^{rs}-a_{28j}^{sr}\eta_{28jk}^{sr}\end{gathered}\right)\right)u_k(\tau)\right]=W_3^s(u(t)). \tag{42}$$

Приведенные выкладки доказывают теорему о необходимых условиях равновесности для траекторий системы (1) – (6), (14).

Теорема 1. Пусть в задаче (1) – (6), (14) $x^*(\cdot)$– равновесная траектория. Тогда порождающие ее оптимальные управления $u^*(\cdot)$ будут удовлетворять условиям (29) – (42).

Выводы и предложения. Основным результатом работы является математическая модель функционирования ОС региона в виде многокритериальной задачи оптимального управления, для которой была сформулирована и доказана теорема о необходимых условиях существования равновесия. При помощи построенной модели можно определить оптимальное распределение средств в различные сферы финансирования с целью достижения равновесного состояния системы образования региона. Дальнейшие исследования могут быть направлены на уточнение условий равновесия и включение их в более детализированные модели ОС региона, в том числе и с нелинейной динамикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№12-01-31516, мол_а).

Список литературы:

1. Ахромеева, Т. С. Новые направления системного анализа и компьютерного моделирования образовательной стратегии и политики России [Электронный ресурс] / Т. С. Ахромеева, М. А. Капустин, С. А. Кащенко и др. – М. – 2001. – http://www.keldysh.ru/papers/2001/prep89/prep2001_89.html.
2. Добрынина, Н.Ф. Математические модели распространения знаний и управление процессом обучения студентов [Текст] / Н.Ф. Добрынина // Фундаментальные исследования. – 2009. – №7.
3. Исследование операций: В 2-х томах. Пер. с англ. [Текст] / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 677 с.
4. Козлов, А.Н. Разработка методов и моделей оценки качества образовательной деятельности в высшем учебном заведении: дисс. … канд. экон. наук: 08.00.13 [Текст] / А.Н. Козлов; МЭСИ. – 172 с.: 61 09-8/1355. 25.02.2009
5. Косенкова, М.В. Построение математической модели функционирования системы регионального образования в виде многокритериальной задачи оптимального управления и исследование признаков оптимальности ее решения [Текст] / М.В. Косенкова, Е.А. Николаева, С.Л. Злобина // Вестник КузГТУ. – 2013. – № 4 (98). – С. 114-123.
6. Рынок труда и образовательных услуг. Регионы России [Электронный ресурс]. – URL: http://labourmarket.ru/Pages/metodika/03.php.

Kosenkova M.V.
Kemerovo State University

DEFINITION OF EQUILIBRI UM IN MATHEMATICAL MODEL OF THE REGIONAL EDUCATIONAL SYSTEM AND THE PROOF OF NECESSARY CONDITION OF ITS EXISTENCE

Summary
The mathematical model of educational system in the region as a multicriterial optimal control problem is investigated, the concept of equilibrium of the system is defined, the necessary conditions for its existence are formulated and proved.
Keywords: mathematical modeling, educational system, optimal control, multicriterial optimization, equilibrium.