УДК 536.421

ВЗАЄМОДІЯ ЛАЗЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ З БАГАТОШАРОВИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Породько Л.В.
Інститут хімії поверхні імені О.О. Чуйка
Національної академії наук України

У статті розглянуто не стаціонарні задачі теплопровідності при взаємодії імпульсного лазерного випромінювання із багатошаровими покриттями твердого тіла. Для розв'язання задачі використовується метод трансляційних матриць, які дозволяють переносити граничні умови з шару на шар. З цією метою використовується метод кінцевих інтегральних перетворень, що дозволяє уникнути обчислення складних інтегралів при застосуванні перетворення Лапласа в нестаціонарних задачах.

Ключові слова: наночастинки, радіальна симетрія, трансляційні матриці, кінцеві інтегральні перетворення.

Постановка проблеми. В даний час лазерне випромінювання з більшим чи меншим успіхом застосовується в різних галузях науки. Унікальні властивості випромінювання лазерів, такі, як монохроматичністю, когерентність, мала розбіжність і можливість при фокусуванні отримувати дуже високу густину потужності на поверхні забезпечили широке застосування лазерів.

Останнім часом широко використається лазерні технології в операціях, де обробка матеріалів за допомогою лазерів здійснюється з меншими енергетичними й трудовими витратами в порівнянні з іншими технологіями (наприклад, для обробки твердих і термостійких матеріалів). У багатьох процесах виявилося можливим сполучити лазерний вплив з іншими видами енергії, наприклад, з дією плазми електричного розряду, вибухової хвилі, ультразвуку, механічного й хімічного впливу. Це значно розширило коло завдань, розв'язуваних за допомогою лазерної технології. Дуже часто лазерна обробка проводиться в присутності хімічних, газових та інших робочих середовищ, що дозволяє проводити ряд робіт, нездійсненних в інших технологіях.

Більшість технологічних операцій, здійснюваних за допомогою лазерів, заснована на тепловому впливі світла на оброблювані матеріали. Перевагою лазерних технологій є простота керування лазерним пучком, висока точність обробки й оперативність. У роботах [1, 2] процеси взаємодії речовини з випромінюванням розглянуті стосовно до металів, сильно поглинаючих напівпровідників і діелектриків. В сучасному світі лазер є єдиним джерелом когерентного випромінювання, можливість одержання якого зробила справжню революцію в науці й техніці [3].

Щоб одержати таку потужність когерентного (монохроматичного) випромінювання шляхом розігріву тіла, останнє повинно мати температуру порядку 10^{13}K. Тому яскравість навіть малопотужних газових лазерів на багато порядків перевищує яскравість Сонця, яка дорівнює 130 Вт/см^2, а яскравість потужних твердотільних лазерів становить величину ≈ 10^{17} Вт/см^2.

Отже, в роботі розглядається багатошарові покриття. Для розв'язання задачі використовується метод трансляційних матриць [4, 5, 6], які дозволяють переносити граничні умови з шару на шар. Аналогічні методи були використані в роботах [7-9]. З цією метою використовується метод кінцевих інтегральних перетворень, що дозволяє уникнути обчислення складних інтегралів при застосуванні перетворення Лапласа [10, 12-16] в нестаціонарних задачах.

Постанова задачі. Виходячи з гіперболічного рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{w^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T+\frac{1}{c\rho}f(x,y,z,t)\Leftrightarrow \tau_p\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\Delta T+\frac{1}{c\rho}f(x,y,z,t), \qquad (1)$$

Де w – швидкість поширення тепла, T – температура, χ – коефіцієнт температуропровідності, t – час, τ_p – час релаксації, ΔT – оператор Лапласа у декартових координатах, c – теплоємність, ρ – густина.

Розглядається періодична задача по координатам x, y з періодом $2a$ по осі x і $2b$ по осі y. В цьому випадку на межах періодичної комірки повинні обертатися на нуль теплові потоки, тобто

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=\pm b}=0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\pm a}=0. \qquad (2)$$

Цій умові задовольняють функції $K_{km}=\cos(\lambda_k x)\cos(\mu_m y)$, де $\lambda_k = k\pi/a$, $\mu_m = m\pi/b$, $k,m=0,1.2,\dots$.

Розглядається шарувата стінка (рис. 1), яка складається з шарів.

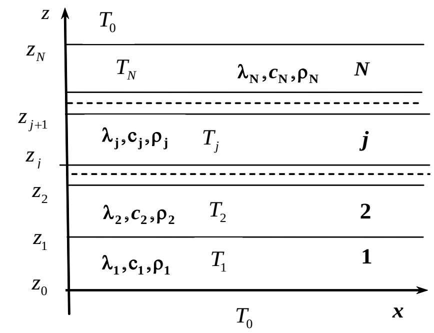

Рис. 1. Багатошарова стінка

Рівняння (1) повинно виконуватись для кожного з шарів, які відрізняються один від одного значеннями розмірів і теплофізичних характеристик

$$\frac{1}{w_j^2}\frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2}+\frac{1}{\chi_j}\frac{dT_j}{dt}=\Delta T_j+\frac{1}{c_j\rho_j}f_j(x,y,z,t)\Leftrightarrow \tau_{p,j}\frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2}+\frac{\partial T_j}{\partial t}=\chi_j\Delta T_j+\frac{1}{c_j\rho_j}f_j(x,y,z,t). \qquad (3)$$

По координаті z приймемо такі умови. На межах поділу шарів при $z = z_j$ будемо вимагати умови ідеального теплового контакту – рівність температур і теплових потоків:

$$T_j = T_{j+1},\ \lambda_j\frac{dT_j}{dz}=\lambda_{j+1}\frac{dT_{j+1}}{dz},\ (j=1,2,\dots,N). \qquad (4)$$

На межі $z = z_0$ приймемо, що температура є сталою у будь який момент часу, тобто

$$T\big|_{z=z_0}=T_1\big|_{z=z_0}=T_0. \qquad (5)$$

На межі $z = z_N$ приймемо умови конвективного теплообміну з середовищем

$$\left[\lambda_N \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha\left(T - T_0\right)\right]_{z=z_N} = \left[\lambda_N \frac{\partial T_N}{\partial z} + \alpha\left(T_N - T_0\right)\right]_{z=z_N} = 0, \qquad (6)$$

де a – коефіцієнт теплообміну.

Внаслідок лінійності в рівняннях і крайових умовах можна ввести температуру $T^* = T - T_0$, що рівнозначно тому, що $T_0 = 0$. Отже рівняння (1), (3) і крайові умови (2), (4) зберігають свій вигляд, а умови (5), (6) приймають вигляд

$$T\big|_{z=z_0} = T_1\big|_{z=z_0} = 0, \qquad (7)$$

$$\left[\lambda_N \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha T\right]_{z=z_N} = \left[\lambda_N \frac{\partial T_N}{\partial z} + \alpha T_N\right]_{z=z_N} = 0. \qquad (8)$$

До граничних умов додаються початкові умови, в якості яких приймемо умови теплового удару

$$T\big|_{t=0} = p_0 H(t), \ \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad (9)$$

де p_0 – інтенсивність, $H(t)$ – функція Хевісайда.

Викладка основного матеріалу та розв'язок задачі. Застосуємо скінчене інтегральне перетворення по координатах x, y з ядром $K_{km} = \cos(\lambda_k x)\cos(\mu_m y),\ k,m = 0,1,2,\ldots,$ що приводить до рівнянь

$$\frac{1}{w^2}\frac{\partial^2 T_{km}}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi}\frac{\partial T_{km}}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_{km}}{\partial z^2} - \left(\lambda_k^2 + \mu_m^2\right)T_{km} + \frac{1}{c\rho} f_{km}(z,t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tau_p \frac{\partial^2 T_{km}}{\partial t^2} + \frac{\partial T_{km}}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T_{km}}{\partial z^2} - \chi\left(\lambda_k^2 + \mu_m^2\right)T_{km} + \frac{1}{c\rho} f_{km}(z,t), \qquad (10)$$

Отже, розв'язок задачі дається рядом

$$T(x,y,z,t) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{1}{\left\|K_{km}\right\|^2} T_{km}(z,t) K_{km}(x,y), \qquad (11)$$

Для граничних умов при та умов сполучення при маємо такі вирази

$$T_{km}\big|_{z=z_0} = T_{km}^{(1)}\big|_{z=z_0} = 0, \ \left[\lambda_N \frac{\partial T_{km}^{(N)}}{\partial z} + \alpha T_{km}^{(N)}\right]_{z=z_N} = 0. \qquad (12)$$

$$T_{km}^{(j)} = T_{km}^{(j+1)}, \ \lambda_j \frac{\partial T_{km}^{(j)}}{\partial z} = \lambda_{j+1}\frac{\partial T_{km}^{(j)}}{\partial z}, \ \left(j = 1,2,\ldots,N\right). \qquad (13)$$

$$T_{km}^{(j)}\big|_{t=0} = p_0 H(t)\left[\int_{-a}^{a}\cos\left(\frac{k\pi x}{2a}\right)dx\int_{-b}^{b}\cos\left(\frac{m\pi y}{2b}\right)dy\right] = p_0 H(t)\frac{16ab}{km\pi^2}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right], \qquad (14)$$

$$\left.\frac{\partial T_{km}^{(j)}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (15)$$

Побудова ядра інтегрального перетворення для шарової структури. Розглянемо задачу на власні значення для однорідного рівняння [11, 13–15], яке відповідає стаціонарному рівнянню (10)

$$\frac{d^2 \mathsf{A}}{dz^2} - \left(\lambda_k^2 + \mu_m^2\right)\mathsf{A} = -\eta^2 \mathsf{A} \qquad (16)$$

У рівності (16) η – власне число, $\mathsf{A} = \mathsf{A}(z)$ – власна функція. Для багатошарової стінки (рис. 1), яка складається з N шарів, функцію $\mathsf{A}(z)$ представимо у вигляді

$$\mathsf{A}_n = \begin{cases} Z_2(z), \ z_1 < z < z_2 \\ Z_2(z), \ z_1 < z < z_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_N(z), \ z_{N-1} < z < z_N \end{cases}. \qquad (17)$$

Розв'язок сформульованої задачі побудовано методом трансляційних матриць.

За допомогою цього методу невідомі довільні сталі N-*го* шару можна виразити через довільні сталі 1-го шару

Рівняння для визначення власних значень має вигляд

$$\left[\lambda_N\sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2} + \alpha\right]\left[\left(t_{11} - t_{12}\right)e^{\sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}z_N} - \left(t_{21} - t_{22}\right)e^{-\sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}z_N}\right] = 0. \qquad (18)$$

Трансцендентне рівняння повинно мати зчисленну кількість коренів Власні функції A_n, які відповідають власним числам η_n мають вигляд

$$\mathsf{A}_n = \begin{cases} Z_{n.1} = A_{n,1}e^{\sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}z} + B_{n,1}e^{-\sqrt{\left(\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2\right)}z}, z_0 < z < z_1 \\ Z_{n,2} = A_{n,2}e^{\sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}z} + B_{n,2}e^{-\sqrt{\left(\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2\right)}z}, z_1 < z < z_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{n,N} = A_{n,N}e^{\sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}z} + B_{n,N}e^{-\sqrt{\left(\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2\right)}z}, z_{N-1} < z < z_N \end{cases} \qquad (19)$$

Отже квадрат норми визначається за формулою

$$\left\|\mathsf{A}_n\right\|^2 = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}}\left\{\begin{matrix}\left[A_{n,j}\right]^2 e^{2\sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}z_j} - \left[B_{n,j}\right]^2 e^{-\sqrt{\left(\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2\right)}z_j} + 2A_{n,j}B_{n,j}\left(z_j - z_{j-1}\right) \\ -\left[A_{n,j}\right]^2 e^{2\sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}z_{j-1}} + \left[B_{n,j}\right]^2 e^{-\sqrt{\left(\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2\right)}z_{j-1}}\end{matrix}\right\}. \qquad (20)$$

Отже система власних функцій для шарової стінки побудована. Така система має властивість ортогональності і повноти в проміжку $[z_0, z_N]$. Слід зауважити, що для різних значень індексів k, m власні функції і власні числа будуть різними, які надалі будемо позначати трьома індексами $\mathsf{A}_{km,n}$ і $\eta_{km,n}$.

Розв'язок нестаціонарної задачі. Далі застосовуємо звичайний прийом при використанні кінцевих інтегральних перетворень [17 – 21]. Для цього помножимо рівняння (10) на власну функцію $\mathsf{A}_{km,n}$ і проінтегруємо отриманий вираз в межах від 0 äî z_n.

Отже після застосування інтегрального перетворення [22, 23] до рівняння матимемо в просторі зображень звичайне диференціальне рівняння з часовою змінною

$$\frac{1}{w^2}\frac{d^2}{dt^2}T_{km,n}^F(t) + \frac{1}{\chi}\frac{d}{dt}T_{km,n}^F(t) + (\eta_{km,n}^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2)T_{km,n}^F(t) = \frac{1}{c\rho}f_{km,n}^F(t). \qquad (21)$$

Розв'язок задачі, як і для суцільної стінки дається інтегралом Дюамеля [11–16] для довільної форми імпульсу

У розгорнутому вигляді розв'язок задачі знаходження просторового та часового розподілу температури при тепловому ударі поверхні твердого тіла з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла матиме вигляд $T(x,z,t) = \sum_{k,m=0}^{\infty} T_{km}(z,t)\frac{K_{km}(x,y)}{\left\|K_{km}\right\|^2} =$

$$= \sum_{k,m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^t \frac{\left(e^{\lambda_{km,n}^{(1)}t} - e^{\lambda_{km,n}^{(2)}t}\right)}{\sqrt{1 - 4\tau_p(\lambda_k^2 + \mu_m{}^2 - \eta_{km.n}^2)}}J_m^F(t-\tau)\,d\tau\right]\frac{\mathsf{A}_{km,n}(z)}{\left\|\mathsf{A}_{km,n}\right\|^2}\right\}\frac{K_{km}(x,y)}{\left\|K_{km}\right\|^2}. \qquad (22)$$

Висновки та пропозиції. Таким чином побудовано метод розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для багатошарової стінки із застосуванням кінцевого інтегрального перетворення. Це дозволяє розглядати широке коло задач такого типу. Оскільки в основу покладено гіперболічне рівняння теплопровідності, тим же методом може бути розв'язані задачі коливань багатошарових структур.

Список літератури:

1. Чернига Р.М. Точные решения нелинейной задачи плавления и испарения металла при действии мощного потока энергии / И.Г. Однороженко // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ. – мат. и техн. науки. –1990. – № 12. – С. 46-48.
2. Рыкалин Н.Н. Лазерная обработка материалов / А.А. Углов, И.В. Зуев // М.: Машиностроение. – 1985. – С. 296.
3. Ораевский А. Н. Лазер // под. ред. А. М. Прохорова Физическая энциклопедия. – М.: «Советская энциклопедия». – 1988. – Т. 2.
4. Лерман Л.Б. Применение уравнений плоской задачи теории упругости к исследованию колебаний протяженных слоистых плит с внутренними линейными опорами // Прикл. механіка. – 1994. – 30, № 6. – С. 66-69.
5. Sylvester J.J. On the reduction of a bilinear quantic of the nth order to the form of a sum of n products by a double orthogonal substitution // Messenger of Mathematics. – 1889. № 19. – P. 42–46.
6. Гречко Л.Г. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з багатошаровими включеннями: пряма та обернена задачі / Л.Б. Лерман, Н.Г. Шкода // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – Вип. 2. – С. 474–481.

7. Породько Л.В. Фізичні процеси, що відбуваються при обробці матеріалів лазерним випромінюванням // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2011. – № 3. – С. 277–280.
8. Породько Л.В. Врахування кінцевої швидкості поширення тепла при лазерному розігріві поверхні твердого тіла / Л.Б. Лерман, О.Ю. Семчук // Хімія, фізика та технологія поверхні. – 2011. – Т. 2, № 3. – С. 343–346.
9. Породько Л.В. Електродинамическая энергия в сферических слоистых наночастицах /Л.Б. Лерман // Технологический аудит и резервы производства. – 2013. – № 6/1(14). – С. 41–44. – ISSN 2226-3780.
10. Ван дер Поль Б. Операційне числення на основі двосторонньої перетворення Лапласа / Х. Бремер // – М.: Видавництво іноземної літератури. – 1952. – 507 с.
11. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Е.М. Лифшиц // Теоретическая фізика. М.: Наука. – 1982. – Т. 8. – 624 с.
12. Ландау Л.Д. Квантовая механіка / Е.М. Лифшиц // М.: Наука. – 1974. – 702 с.
13. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. – Oxford: Clarendon, 1891. – 3rd ed. – V. 2.
14. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.
15. Maxwell Garnett J.C. Colours in metal glasses and in metallic films // Philos. Trans. Roy. Soc. – 1904. – Vol. 203. – P. 385-420.
16. Савельев И.В. Курс общей физики // Астрель. – 2001. – Т. 5. – ISBN 5-17-004587-5.
17. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи.: Учеб. для электротехн. радиотехн. спец. вузов // перераб. и доп. – М.: Высш. шк. – 1990. – Т. 3. – 400 с.
18. Vernotton P. La nouvelle equation de la chaleur // Journ. de la Tranms de la chaleur. – 1961.
19. Лерман.Л.Б. Періодичні структури, індуковані на поверхні твердих тіл інтерференцією лазерних пучків / А.П. Шпак, Л.Г. Гречко, Л.Ю. Куницкая, О.Ю. Семчук // Теплові ефекти. Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2007. – Т. 5, № 3. – С. 683–718.
20. Lerman L.B. Thermal effects caused interaction of powerful laser radiation of condensed matter / O.Yu. Semchuk, L.G. Grechko, M. Willander, M. Karlsteen // J. Optoelect. Adv. Mat. – 2010. – V.12, № 3. – P. 586–588.
21. Коздоба Л.А. Методи рішення нелінійних задач теплопровідності // М.: Наука. – 1975. – С. 228.
22. Волков И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов. Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко / А. Н. Канатников // М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2002. – Т. 2. – 228 с. – ISBN 5-7038-1273-9.
23. Грицько Є.Г. Побудова інтегрального зображення розв'язку задачі теплопровідності для зонально-однорідного тіла складної форми / Л.М. Журавчак // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.– Київ: Ін-т математики НАН України. – 1994. – Вип. 7. – С. 59–64.

Породько Л.В.
Институт химии поверхности имени А.А. Чуйко
Национальной академии наук Украины

ВЗАЕМОДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С МНОГОСЛОЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Аннотация
В статье рассмотрены не стационарные задачи теплопроводности при взаимодействии лазерного излучения с многослойными поверхностями твердого тела. Для решения задачи используется метод трансляционных матриц, которые позволяют переносить граничные условия со слоя на слой. С этой целью используется метод конечных интегральных преобразований, что позволяет избежать вычисления сложных интегралов при применение преобразования Лапласа в нестационарных задачах.
Ключевые слова: наночастицы, радиальная симметрия, трансляционные матрицы, конечные интегральные преобразования.

Porodko L.V.
Institut Chemistries of Surface named after O.O. Chuyka
of National Academy of Sciences of Ukraine

INTERACTION OF LASER RADIATION WITH MULTILAYER OBJECTS

Summary
The article deals not stationary heat conduction problem in the interaction of pulsed laser radiation with multilayer coating solids. To solve the problem using the method of translational matrices that allows transfer with boundary conditions on the layer to layer. For this purpose, use finite integral transforms, thus avoiding complex calculations integral in the application of the Laplace transform in no stationary problems.
Keywords: nanoparticles, radial symmetry, translational matrix, finite integral transformations.