УДК 517.5

НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ПРОСТОРАХ $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$

Сілін Є.С.
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

Стаття присвячена дослідженню питань апроксимації операторами Валле Пуссена локально сумовних на дійсній осі функцій, що задаються $\bar{\psi}$-похідними. Оператори Валле Пуссена належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$. Знайдено оцінки зверху відхилень операторів Валле Пуссена на класах локально інтегровних функцій $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$. Розглянуто випадки, коли класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ визначаються повільно спадними і швидко спадними до нуля функціями ψ_1 і ψ_2.

Ключові слова: теорія апроксимації, локально інтегровні функції, ряди Фур'є, оператори Валле Пуссена, $\bar{\psi}$-похідна.

Постановка проблеми. Традиційним апаратом наближення періодичних функцій є тригонометричні поліноми заданого степеня n, зокрема, поліноми, які породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є.

Для наближення функцій, які визначені на всій дійсній осі і не є обов'язково періодичними, природним апаратом апроксимації є цілі функції експоненціального типу $< \sigma$. Початки сучасної теорії наближення цілими функціями було покладено роботами С.Н. Бернштейна. Саме йому належить ідея побудови теорії наближення функцій, визначених на дійсній осі, в яку б входила і теорія наближення періодичних функцій. Ця ідея стала дуже важливою для обох теорій упродовж останніх десятиріч вони успішно розвиваються паралельно, взаємно збагачуючи і доповнюючи одна одну.

У 1983 році О.І. Степанець запровадив нову класифікацію періодичних функцій за допомогою мультиплікаторів та зсувів аргументів. Розвиваючи цей напрямок досліджень, О.І. Степанець у 1988 році запровадив класи $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ функцій, локально сумовних на дійсній осі, які не є обов'язково періодичними і містять класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ періодичних функцій як частинний випадок. У 1998 році О.І. Степанець розглянув класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ функцій, локально сумовних на дійсній осі, які є узагальненням запроваджених у 1996 році множин $\bar{\psi}$-інтегралів 2π-періодичних функцій $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$.

На класах $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ на цей час були розв'язані задачі теорії наближення майже в тому ж обсязі, що і на класах 2π-періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Природним чином постало питання отримання на нових класах $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ неперіодичних аналогів результатів, які відомі для класів $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$.

Основні поняття та означення. Спочатку наведемо означення класів Степанця (див. [1]).

Нехай $\hat{L}_{\hat{p}}$ – множина функцій f, які визначені на дійсній осі (і не обов'язково періодичні) й такі, що мають скінченну норму

$$\| f \|_{\hat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} | f(t)| \, dt, \quad p\in[1,\infty),$$

$$\| f \|_{\hat{\infty}} \overset{df}{=} \operatorname{esssup}_{\in} | f(t)|.$$

Далі будемо писати $\hat{L}$ замість $\hat{L}_{\hat{1}}$.

Позначимо через $\mathfrak{A}$ множину неперервних при $v\geq 0$ функцій $\psi(v)$, які задовольняють умови:

1) $\psi(v)\geq 0$, $\psi(0)=0$, $\psi(v)$ зростає на $[0,1)$;
2) $\psi(v)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim_{v\to\infty}\psi(v)=0$;
3) похідна $\psi'(v)=\psi'(v+0)$ має обмежену варіацію на $[0,\infty)$.

Підмножину функцій $\psi(v)$, для яких

$$\int_1^\infty \frac{\psi(v)}{v}\,dv < \infty,$$

позначають $\mathfrak{A}'$. Множину функцій $\psi(v)$, які задовольняють лише умову 2) позначають $\mathfrak{M}$.

Для пари $\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{A}$ визначимо функцію $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} \overset{df}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-},$$

де ψ_{1+} та ψ_{2-} – парне і непарне продовження ψ_1, ψ_2 функцій відповідно.

Тоді через $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_{\hat{p}}$ будемо позначати множину функцій $f\in\hat{L}_{\hat{p}}$, які майже для всіх x можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x) = A + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\hat{\bar{\psi}}(t)\,dt \overset{df}{=} A + \varphi * \hat{\bar{\psi}}(x), \qquad (2)$$

де $A = const$, інтеграл розуміємо як границю по симетричних проміжках, що розширюються, $\varphi\in\hat{L}_{\hat{p}}$,

$$\hat{\bar{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)e^{-ixt}\,dx. \qquad (3)$$

Якщо $\psi_1\in\mathfrak{A}$, $\psi_2\in\mathfrak{A}'$, то перетворення $\hat{\bar{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі (див., наприклад, [2]).

Наслідуючи О.І. Степанця, функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (2) називають $\bar{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Для наближення функцій з класів $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_{\hat{p}}$ будемо використовувати оператори Валле Пуссена

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A + f^{\bar{\psi}} * \hat{\lambda}_{\sigma,c}\bar{\psi}(x),$$

де $f\in\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_{\hat{p}}$, а $\hat{\lambda}_{\sigma,c}\bar{\psi}(x)$ перетворення вигляду (3) функції $\lambda_{\sigma,c}(t)\bar{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0\leq |t| \leq c, \\ \dfrac{\sigma - |t|}{\sigma - c}, & c\leq |t| \leq \sigma, \\ 0, & \sigma\leq |t|, \quad \sigma > c \geq 1. \end{cases}$$

Такі оператори розглядалися О.І. Степанцем у роботах [1–5], де показано, що за певних умов $V_{\sigma,c}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$, а у періодичному випадку, при натуральних σ і c оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ співпадають з сумами Валле Пуссена.

Далі, наслідуючи [5], з множини $\mathfrak{A}$ оберемо підмножини $\mathfrak{A}_0$ та $\bar{F}$. Кожній функції $\psi\in\mathfrak{M}$ $\forall t\geq 1$ співставимо пару функцій $\eta(\psi,t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2))$ та $\mu(\psi,t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\quad t\geq 1$.

Тоді:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi\in\mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi,t) \leq K_1\},\ \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}',$$

$$\bar{F} = \{\psi\in\mathfrak{A} : \eta'(t) \leq K_2\},$$

де K_1, K_2 – деякі сталі, які, можливо, залежать від функції ψ (t).

Апроксимативні властивості операторів Валле Пуссена в нашій роботі характеризуються відхиленнями

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x),\ f\in\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p,\ p\in[1,\infty).$$

Введемо наступні позначення множин:

$$W_\sigma^2 = \left\{ \varphi\in\varepsilon_\sigma : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi^2(t)|}{(1+|t|)^2}\,dt < \infty \right\};$$

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

$$E_\sigma(f)=\inf_{\varphi\in W^2_\sigma}\operatorname*{esssup}_{x\in R}|f(x)-\varphi(x)|.$$

Надалі $c=\sigma-h$ і $\Theta=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{h}{\sigma}$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [2–5] розглянуто задачу наближення локально інтегровних функцій і не обов'язково періодичних функцій операторами Фур'є на класах функцій, що визначаються (ψ,β)-похідними. Подальший розвиток цих досліджень – робота [1], де класи функцій, що наближуються, визначаються узагальненою $\bar\psi$-похідною. Узагальненню цих робот на інші агрегати апроксимації, зокрема оператори Валле Пуссена, присвячено статті [6–11] у яких в якості об'єкта дослідження виступали класи неперервних та не обов'язково періодичних функцій в рівномірній метриці. А самі класи визначалися (ψ,β)- та $\bar\psi$-похідними.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. У даній статті розглядається питання наближення локально інтегровних функцій операторами Валле Пуссена в інтегральній метриці на класах функцій, що визначаються узагальненою $\bar\psi$-похідною.

Постановка завдання. Метою роботи є знаходження оцінок зверху для відхилень операторів Валле Пуссена на класах локально інтегровних функцій $\hat L_{\hat p}$. **Об'єктом** дослідження є класи $\hat L_{\hat p}$. Предметом дослідження є апроксимативні характеристики операторів Валле Пуссена на згаданих класах.

Задачі дослідження:

1. На класах $\hat L_{\hat p}$ у випадку, коли вони містять функції малої гладкості, отримати оцінки зверху для величин $\rho_{\sigma,c}(f;x)$.

2. На класах $\hat L_{\hat p}$ у випадку, коли вони складаються з функцій скінченної гладкості, нескінченно диференційовних, аналітичних і, в тому числі, цілих функцій отримати оцінки зверху для величин $\rho_{\sigma,c}(f;x)$.

Виклад основного матеріалу дослідження. В прийнятих позначеннях мають місце наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi_1\in A_0$, $\psi_2\in A_0'$, *числа* σ *і* $h=h(\sigma)$, $\sigma>h\ge1$ *обрані так, що* $\Theta\in[0,1)$, *стала* $a\in(0,\pi\sigma/h)$. *Тоді* $\forall f\in\hat L^{\bar\psi}\hat L_{\hat p}$, $p\in[1,\infty)$ *мають місце нерівності*

$$\|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|_{\hat p}\le E_q(f^{\bar\psi})_{\hat p}\left(\frac{4|\bar\psi(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}+\frac{2}{\pi}\int_\sigma^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt\right)+ +O(|\bar\psi(\sigma-h)|) \qquad (4)$$

Теорема 2. *Нехай* $\psi_1\in A_0$, $\psi_2\in A_0'$, *числа* σ *і* $h=h(\sigma)$, $\sigma>h\ge1$ *обрані так, що* $\Theta\in[0,1)$, *стала* $a\in(0,\pi\sigma/h)$. *Тоді*

$$E(\hat L^{\bar\psi}_{1,1})_{\hat 1}\le\frac{4|\bar\psi(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}+\frac{2}{\pi}\int_\sigma^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+O(|\bar\psi(\sigma-h)|).$$

Теорема 3. *Нехай* $\psi_i\in\bar F$, $i=1,2$, *числа* $h=h(\sigma)$ *обираються так, що* $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi_i;\sigma);\sigma]$, $i=1,2$. *Якщо існують сталі* K,K', *такі, що виконана умова*

$$0<K\le\frac{\eta(\psi_1,\sigma)-\sigma}{\eta(\psi_2,\sigma)-\sigma}\le K'<\infty,\sigma>1, \qquad (5)$$

то $\forall f\in\hat L^{\bar\psi}\hat L_{\hat p}$, $p\in[1,\infty)$ мають місце нерівності

$$\|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|\le E_q(f^{\bar\psi})_{\hat p}\frac{4|\bar\psi(\sigma)|}{\pi^2}\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|+O(|\bar\psi(\sigma)|), \qquad (6)$$

де $\eta(\sigma)$ *може бути або* $\eta(\psi_1,\sigma)$ *або* $\eta(\psi_2,\sigma)$.

Теорема 4. *Нехай* $\psi_i\in\bar F$, $i=1,2$, *числа* $h=h(\sigma)$ *обираються так, що* $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi_i;\sigma);\sigma]$, $i=1,2$. *Якщо існують сталі* K,K', *такі, що виконана умова (5), то*

$$E(\hat L^{\bar\psi}_{1,1})_{\hat 1}\le\frac{4|\bar\psi(\sigma)|}{\pi^2}\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|+O(|\bar\psi(\sigma)|).$$

Доведення теорем почнемо зі встановлення деяких допоміжних тверджень. Величину $\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)$ розглянемо у двох окремих випадках, в залежності від швидкості прямування до нуля пари функцій ψ_1, ψ_2.

Лемма 2. *Нехай* $\psi_i\in\bar F$, $i=1,2$ *та виконана умова (5), числа* $h=h(\sigma)$ *обираються так, що* $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi_i;\sigma);\sigma]$, $i=1,2$. *Функції* $a_i=a_i(\sigma)=(\eta(\psi_i,\sigma)-\sigma)^{-1}$, $i=1,2$.

Тоді $\forall f\in\hat L^{\bar\psi}\hat L_{\hat p}$, $p\in[1,\infty)$ *майже в кожній точці* $x\in R$ *і дійсних чисел* $\sigma>h\ge1$,

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)=\frac{-|\bar\psi(\sigma)|}{\pi}\int_{\frac{a}{\sigma}\le|t|\le\frac{\pi}{h}}\delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t-\theta)}{t}dt+ +\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int_0^\infty\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt+A_{\sigma,h}(f;x), \qquad (7)$$

де $\delta(v)=f^{\bar\psi}(v)-\varphi(v)$, $\varphi(v)$ – *функція з множини* $W^2_{\sigma-h}$, *для якої* $E_{\sigma-h}(f)=\|f^{\bar\psi}(x)-\varphi(x)\|_C$, $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, $|A_{\sigma,h}(f;x)|\le K|\bar\psi(\sigma)|E_{\sigma-h}(f^{\bar\psi})$.

Лемма 2. *Нехай* $\psi_i\in\bar F$, $i=1,2$ *та виконана умова (5), числа* $h=h(\sigma)$ *обираються так, що* $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi_i;\sigma);\sigma]$, $i=1,2$. *Функції* $a_i=a_i(\sigma)=(\eta(\psi_i,\sigma)-\sigma)^{-1}$, $i=1,2$.

Тоді $\forall f\in\hat L^{\bar\psi}\hat L_{\hat p}$, $p\in[1,\infty)$ *майже в кожній точці* $x\in R$ *і дійсних чисел* $\sigma>h\ge1$,

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)=\nu_a\frac{|\bar\psi(\sigma)|}{\pi}\int_{m_a\le|t|\le M_a}\delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t-\theta)}{t}dt+ +d^{\psi_1}_{\sigma,h}(a_1;f;x)+d^{\psi_2}_{\sigma,h}(a_2;f;x), \qquad (8)$$

де $\nu_a=sign(a(\sigma)-\frac{\pi}{h})$, $m_a=\min\{a(\sigma);\frac{\pi}{h}\}$, $M_a=\max\{a(\sigma),\frac{\pi}{h}\}$, в ролі функції $a(\sigma)$ може виступати будь-яка з функцій $a_i(\sigma), i=1,2$, $\delta(v)=f^{\bar\psi}(v)-\varphi(v)$, $\varphi(v)$ – функція з $W^2_{\sigma-h}$, для якої $E_{\sigma-h}(f)=\|f^{\bar\psi}(x)-\varphi(x)\|_C$, $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, і

$$|d^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i;f;x)|\le KE_{\sigma-h}(f^{\bar\psi})|\bar\psi_i(\sigma)|,\qquad i=1,2.$$

Далі, застосовуючи до оцінок (7) і (8) узагальнену нерівність Мінковського, одержуємо нерівності (4) і (6).

Якщо $\hat L_{1,1}\overset{df}{=}\{f\in\hat L^{\bar\psi}:\|f^{\bar\psi}(\cdot)\|_{\hat 1}\le1\}$, то $\forall f\in\hat L^{\bar\psi}_{1,1}$ виконується нерівність $E_q(f^{\bar\psi})_{\hat 1}\le1$. Тому, покладая $E(\hat L^{\bar\psi}_{1,1})_{\hat 1}=\sup_{f\in\hat L^{\bar\psi}_{1,1}}\|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|_{\hat 1}$ з теорем 1 і 3 в якості наслідка одержуємо теореми 2 і 4.

Зауваження. У випадку $h=1$, $\psi_1(\sigma)=\psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma)=\psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta\in R$ та

$$\lambda^*_{\sigma,1}(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le\sigma-1,\\ 1-\frac{(t-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma-1\le t\le\sigma,\ \operatorname*{esssup}_{t\in R}|f^{\bar\psi}(t)|\le1,\\ 0, & t\ge\sigma;\end{cases}$$

(тобто, для класів $\hat C^{\bar\psi}_{\beta,\infty}$) теореми 1–4 доведені О.І. Степанцем.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальшого розвитку в цьому напрямку. Доведені теореми показують, що оператори Валле Пуссена у випадку наближення функцій з класів $\hat L^{\bar\psi}\hat L_{\hat p}$ забезпечують даній локально інтегровній (і не обв'язково періодичний) функції наближення, що мало відрізняється від найкращого наближення цілими функціями експоненціального типу з множини $W^2_{\sigma-h}$. Подальший розвиток цього напрямку досліджень полягає у відшуканні верхніх граней відхилень величин $\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)$ та пошук розв'язків відомої задачі Колмогорова-Нікольського на класах $\hat L^{\bar\psi}\hat L_{\hat p}$.

Список літератури:

1. Stepanets A. I., Wang Kunyang, Zhang Xirong Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. – 1999. – № 11. – С. 1549–1561.
2. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – № 1. – С. 102–112.
3. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Укр. мат. журн. – 1990. – № 2. – С. 210–222.
4. Степанец А. И. Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – № 2. – С. 198–209.
5. Степанец А. И. Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. – 1994. – № 5. – С. 597–625.
6. Рукасов В. И. Приближение операторами Валле-Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – 44, № 5. – С. 682–691.
7. Рукасов В. И. Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 3. – С. 414–424.
8. Рукасов В. І. Про наближення операторами Валле-Пуссена функцій, заданих на дійсній осі // Доп. НАН України. – 2003. – № 6. – С. 26–28.
9. Рукасов В. И., Силин Е. С. Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 2. – С. 230–239.
10. Рукасов В. И., Силин Е. С. Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 3. – С. 394–400.
11. Рукасов В. И., Силин Е. С. Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена. Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання / Відп. ред. О. І. Степанець. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 192-208. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 46).

Силин Е.С.
Государственное высшее учебное заведение
«Донбасский государственный педагогический университет»

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ПРОСТРАНСТВАХ $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$

Аннотация
Статья посвящена исследованию вопросов аппроксимации операторами Валле Пуссена локально суммируемых на действительной оси функций, которые задаются $\bar{\psi}$-производными. Оператори Валле Пуссена принадлежат множеству ε_σ целых функций экспоненциального типа $\le \sigma$. Найдены оценки сверху отклонений операторов Валле Пуссена на классах локально интегрируемых функций $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$. Рассмотрены случаи, когда классы $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ определяются медленно убывающими и быстро убывающими к нулю функциями ψ_1 и ψ_2.

Ключевые слова: теория аппроксимации, локально интегрируемые функции, ряды Фурье, операторы Валле Пуссена, $\bar{\psi}$-производная.

Silin E.S.
State Higher Educational Institution
«Donbass state teacher's training university»

APPROXIMATION BY VALLE POUSSIN'S OPERATORS IN SPACES $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$

Summary
The article contains the researches on the problems of approximation by Valle Poussin's operators on the classes of functions, which locally summable on the real line and determined by $\bar{\psi}$-derivatives. Tне Valle-Poussin's operators belong to the set of entire functions of exponential type $\le \sigma$. We find upper bounds of deviations of the Valle Poussin's operators on the classes $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$. The cases have been considered in thesis when the classes $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ are defined by slowly going downward and quickly going downword to zero functions ψ_1 and ψ_2.

Keywords: approximation theory, locally integrable functions, Fourier series, Valle Poussin's operators, $\bar{\psi}$-derivatives.