УДК 531/532

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНСТРУКЦИИ С ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Штефан Н.И., Гнатейко Н.В.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

В данной статье рассматривается вопрос о нестационарном динамическом взаимодействии упругой конструкции с жидкостью при импульсном нагружении. При этом изучаются различные модельные представления о поведении жидкости. Поведение жидкой среды в работе рассмотрено в рамках двух моделей: идеально упругой и пузырьковой. Сформулирована общая математической постановка задачи нестационарного взаимодействия упругой конструкции в виде цилиндрического бака и коаксиальных цилиндров с жидкостью на основе принятых модельных представлений о поведении жидкости.
Ключевые слова: нестационарное взаимодействие, гидроупругие системы, идеально упругая жидкость, пузырьковая жидкость.

Постановка задачи. Данная работа посвящена исследованию динамики гидроупругих систем с учетом различных модельных представлений о поведении жидкости.

Математическая постановка задачи заключается в использовании уравнений:

1) движения конструкции;
2) движения жидкости;
3) контактного взаимодействия конструкции с жидкостью (граничные условия).

Для описания движения рассматриваемых в работе конструкций в виде цилиндрического бака с упругим днищем (круглой пластины) и коаксиальных цилиндров использовались линейные уравнения моментной теории оболочек, записанные в перемещениях. Контактные условия на поверхности «жидкость-конструкция» соответствуют условиям непротекания и равенства давления идеальной жидкости нагрузке, направленной по нормали к конструкции.

Поведение жидкой среды в работе рассмотрено в рамках двух моделей: идеально упругой и пузырьковой [1]. Показано, что использованные модели жидкости не являются независимыми, а при некоторых условиях даже переходят одна в другую.

Цель исследования заключается в математической постановке задачи нестационарного взаимодействия гидроупругой конструкции в виде цилиндрического бака и коаксиальных цилиндров с жидкостью на основе принятых модельных представлений о поведении жидкости.

Изложение основного материала исследования. При математическом описании модели идеально упругой жидкости приняты допущения о неразрушаемости жидкой среды и отсутствия в ней поврежденностей в виде пузырьков газа. При этом уравнение движения в форме Лэмба-Громеки и уравнение неразрывности жидкости имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_*}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left(V_*^2\right) + rotV_* \text{ x } V_* = -\frac{1}{\rho_*}\nabla P_* , \\ &divV_* = -\frac{1}{\rho_*}\left(\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + V_*\nabla\rho_*\right) , \end{aligned} \qquad (1)$$

тут ∇ – оператор Гамильтона, V_*, P_*, ρ_* – вектор скорости жидкости, давление и плотность, соответственно.

Уравнение состояния такой жидкости [1]:

$$\frac{P_* + B}{P_0 + B} = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\lambda}, \qquad (2)$$

где P_0, ρ_0 – давление и плотность в жидкости в состоянии покоя, λ – показатель адиабаты, B – постоянная.

Математическая модель пузырьковой жидкости существенно отличается от идеальной тем, что она дополнительно содержит уравнение колебаний пузырька газа в виде уравнения Рэлея [2]

$$R\ddot{R} + \frac{2}{3}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_p}\left(P_г - P(t)\right),$$

$$P_г = p_0\left(R_0/R\right)^{3\gamma}, \qquad (3)$$

а в уравнении движения жидкой среды присутствуют дополнительные члены, учитывающие наличие пузырьков газа радиуса R и концентрации (количество в 1 см^3) n.

Так как рассматриваемое движение жидкости считаем безвихревым, то введем потенциал скорости ψ_*, а именно:

$$V_* = \nabla\psi_*.$$

Учитывая сказанное выше, описываем движение пузырьковой жидкости системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi = \ & \lambda\rho_0\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi)^2\right] + n\frac{\partial V}{\partial t} + \\ & +\nabla\psi\cdot\nabla\left\{\lambda\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\nabla\psi)^2/2 + nV\right)\right\}\end{aligned} \qquad (4)$$

$$aV^{-1/3}\ddot{V} - aV^{-4/3}\dot{V}^{2/6} = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} + \rho_0\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\right],$$

где V – объем пузырька газа.

Система (4) соответствует наиболее общему случаю движения пузырьковой жидкости. В работе рассмотрен ряд упрощенных вариантов представления уравнений (4), соответствующих случаям частичной физической линеаризации задачи. Отметим, что наиболее простой вариант соответствует допущению о недеформируемости газовых пузырьков. В этом случае присутствующее газосодержание учитывалось пересчетом скорости звука в газонасыщенной среде с учетом объемной концентрации газа.

На основе принятых модельных представлений о поведении гидроупругих систем общая постановка задачи гидроупругости относительно расчета нестационарного взаимодействия цилиндрического бака с пузырьковой жидкостью заключается в решении следующих взаимосвязанных уравнений:

1) уравнения движения пластины, которая является днищем бака [3]:

$$D\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)W = -\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t} - P_*, \qquad (5)$$

где W – прогиб пластины в направлении оси, P_* – гидродинамическое давление, ρ и h – плотность материала и толщина пластины;

или уравнения движения цилиндрической оболочки, записанного относительно компонент перемещения срединной поверхности согласно [4].

2) уравнения движения пузырьковой жидкости:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + n\frac{4}{3}\pi\frac{\partial\left(R^3\right)}{\partial t} \qquad (6)$$

(уравнение (6) записано в цилиндрической системе координат x, r, φ);

3) уравнения колебаний пузырька газа:

$$R\ddot{R} + \frac{2}{3}\dot{R}^2 = \frac{\left(P_г - p(t)\right)}{\rho_p}, \quad P_г = P_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma},$$

$P_г$ – давление газа в пузырьке;

4) граничные условия:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \text{ (для бака)},$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \text{ (для оболочки)}.$$

Таким образом, рассмотрена математическая постановка инженерной задачи гидроупругости относительно исследования нестационарного поведения гидромеханических систем в виде:

а) цилиндрического бака с упругим стальным днищем, заполненного пузырьковой жидкостью при воздействии импульсной нагрузки $P_0 = Ae^{\alpha a_0 t}$ на свободную поверхность жидкости;

б) соосных (коаксиальных) цилиндрических оболочек, между которыми находится жидкость, при воздействии импульсной нагрузки на боковую поверхность внешней оболочки;

Отметим, что деформирование оболочек и движение жидкости должно быть в таком случае симметричным относительно плоскости, проходящей через $\varphi = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}$, следовательно записываем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0;\ \frac{\partial W_i}{\partial\varphi} = 0;\ \frac{\partial V_i}{\partial\varphi} = 0.$$

Общая расчетная методика исследования гидроупругих процессов в данной работе заключается в решении задачи гидроупругости для указанных выше конструкций в двух вариантах, соответствующих принятым моделям жидкости. При этом уравнения движения конструкции и граничные условия остаются неизменными.

Особый интерес представляет вопрос об исследовании динамического поведения пузырьков газа, находящихся в жидкости. Как показали численные эксперименты по моделированию пузырьковой жидкости, основное время расчёта требует решение уравнения Рэлея вида (3).

В работе рассматриваются следующие методики и алгоритмы решения уравнения Рэлея.

1. Аналитико-численная методика, основанная на дискретизации процесса нагружения пузырька по параметру нагружения p. Предполагается, что давление p, оставаясь постоянным в пределах шага, скачкообразно меняется при переходе от шага к шагу. Это позволяет использовать аналитическое решение уравнения (3).

2. Численное интегрирование уравнения (3) с использованием математической среды программирования MATLAB.

3. Численная процедура расчета, основанная на использовании линеаризованного уравнения Рэлея, соответствующего случаю малых колебаний пузырька.

Отметим что для интегрирования (3) применят конечно-разностное представление производных по времени.

Программная алгоритмическая реализация подсчетов метода конечных разностей была проделана с помощью математической среды программирования MATLAB.

В результате проведенной серии численных экспериментов будет получена исчерпывающая информация о работоспособности и функциональных возможностях предложенных методик.

Следует отметить что модель пузырьковой жидкости, которая используется в исследованиях автора, основана на предположении об отсутствии взаимодействия газовых пузырьков, находящихся в жидкости. Было также оценено минимальное расстояние между центрами пузырьков, при котором данное предположение справедливо.

Выводы из данного исследования и перспективы дальнейшего развития в этом направлении. В результате проведения серии численных экспериментов по моделированию пузырьковой жидкости на основе уравнения Рэлея будет получена исчерпывающая информация о работоспособности и функциональных возможностях предложенных в работе методик по исследованию динамического поведения пузырьков газа, находящихся в жидкости.

Дальнейшее исследование динамики нестационарного взаимодействия элементов конструкции с идеальной и пузырьковой жидкостью заключается в программной алгоритмической реализации подсчетов с привлечением метода конечных разностей с помощью математической среды программирования MATLAB и в анализе полученных численных результатов, что найдет свое отражение в дальнейших публикациях.

Список литературы:

1. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем / Галиев Ш.У. – Киев: Наукова думка, 1981. – 275 с.
2. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики / О.В. Руденко, С.И. Солуян – М.: Наука, 1995. – 287 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / Вольмир А.С. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
4. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ / М.А. Ильгамов – М.: Наука, 1969. – 182 с.
5. Авдеев К.А. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду / К.А. Авдеев, В.С. Аксенов, А.А. Борисов, Р.Р. Тухватуллина, С.М. Фролов, Ф.С. Фролов // Горение и взрыв. – 2015, т. 8, № 2. – С. 45-56.
6. Нигматулин Р.И. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагалов, И.К. Гимайдинов // Доклады РАН. – 2014, т. 378, № 6 – С. 763-767.

Штефан Н.І., Гнатейко Н.В.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ КОНСТРУКЦІЇ З БУЛЬБАШКОВОЮ РІДИНОЮ

Анотація
У даній статті розглядається питання про нестаціонарну динамічну взаємодію пружної конструкції з рідиною при імпульсному навантаженні. При цьому вивчаються різні модельні уявлення про поведінку рідини. Поведінка рідкого середовища в роботі розглянута в рамках двох моделей: ідеально пружною і бульбашкової. Сформульована загальна математична постановка задачі нестаціонарної взаємодії пружної конструкції у вигляді циліндричного бака і коаксіальних циліндрів з рідиною на основі прийнятих модельних уявлень про поведінку рідини.

Ключові слова: нестаціонарна взаємодія, гідропружні системи, ідеально пружна рідина, бульбашкова рідина.

Shtefan N.I., Gnateyko N.V.
National Technical University of Ukraine
«Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky»

CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE NONSTATIONARY INTERACTION OF A STRUCTURE WITH A BUBBLE LIQUID

Summary
In this paper, we consider the nonstationary dynamic interaction of a hydroelastic structure under impulse loading. In doing so, various model concepts about the behavior of a liquid are studied. The behavior of the liquid medium in the work is considered in the framework of two models: perfectly elastic and bubble. A general mathematical formulation of the problem of the nonstationary interaction of a hydroelastic construction in the form of a cylindrical tank and coaxial cylinders with a fluid is formulated on the basis of the accepted model concepts of fluid behavior.

Keywords: nonstationary interaction, hydroelastic systems, perfectly elastic liquid, bubble liquid.