УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ І ФОРМ КОЛИВАНЬ СТРИЖНІВ

Трубачев С.І., Колодежний В.А.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Робота присвячена розв'язанню задачі про коливання стрижнів варіаційно-сітковим методом. Отримані вирази для визначення основних власних частот при поздовжніх і згинальних коливаннях стрижнів змінного перерізу. Приведені приклади розрахунків поздовжніх та згинальних коливань клиновидних та конусних стрижнів. Виконано порівняння тестових результатів з точним розв'язком. Досліджений вплив клиновидності й конусності на значення власних частот.
Ключові слова: коливання, власні частоти, власні форми, стрижні змінного перерізу, варіаційно-сітковий метод.

Постановка проблеми. При розрахунках стрижнів і стрижневих конструкцій широко застосовуються методи опору матеріалів [1] і будівельної механіки [2]. У процесі роботи стрижні зазнають значний вплив вібраційних навантажень, тому дослідження динаміки стрижнів як постійного, так і змінного перерізу є актуальним завданням. У зв'язку з різними умовами закріплення стрижнів велике значення має чисельний аналіз коливань зазначених конструкцій.

Якщо ж розв'язок можна представити у вигляді ряду функцій, то в цьому випадку переважніше аналітичний розв'язок. Становить інтерес вплив конусності або клиновидності стрижня змінного перерізу на величину частот поздовжніх або згинальних коливань.

При розрахунку на віброміцність основні труднощі полягають у визначенні спектра власних частот і форм коливань механічної системи й, у загальному випадку, розрахунок зводиться до відомої узагальненої задачі на власні значення:

$$(Ku,v)=\omega^2(Mu,v),\ \ \forall v\in V, \qquad (1)$$

де V – множина допустимих функцій, (Ku,v), (Mu,v) – сімейство симетричних білінійних безперервних форм, що відповідають амплітудним значенням потенціальної і кінетичної енергії системи, K – матриця жорсткостей, M – матриця мас.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показує, що в основному досліджувалися стрижні з постійним поперечним перерізом [3].

Викладення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Недостатньо досліджень коливань стрижнів змінного поперечного перерізу з використанням ефективних чисельних методик розрахунків, які програмно реалізовані і апробовані на практичних задачах.

Метою статті є розробка методики визначення власних форм і частот коливань стрижнів як з постійним, так і зі змінним перерізом, що дуже важливо для авіаційних конструкцій.

Виклад основного тексту. При розв'язку задачі чисельними методами нескінченномірний простір допустимих функцій V заміняється скінченномірним V_h шляхом дискретизації системи. При цьому задача (1) заміняється наближеною: для заданого скінченномірного простору V_h необхідно знайти такі значення ω, u_h, що

$$(Ku_h,v_h)=\omega^2(Mu_h,v_h),\ \ \forall v_h\in V_h. \qquad (2)$$

При розв'язку прикладних задач для стрижневих систем найбільший інтерес представляє декілька найменших власних частот і відповідних їм форм коливань. Таким чином, приходимо до неповної задачі на власні значення. Оскільки ця задача є нелінійною, то доцільно використовувати чисельні методи.

При поздовжніх коливаннях стрижня сили спрямовані уздовж прямолінійної осі, а напруження і деформації розподілені по площі перерізу рівномірно. Амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії стрижня мають вигляд

ТЕХНІЧНІ НАУКИ

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx,\ T = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^l \rho F u^2 dx, \quad (3)$$

тут E – модуль Юнга, F – площа поперечного перерізу, ρ – щільність матеріалу, l – довжина стрижня.

Поздовжні переміщення апроксимуються лінійним поліномом:

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l}x, \quad (4)$$

де u_i, u_j – переміщення i-го й j-го вузлів.

У випадку згинальних коливань стрижня амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії мають вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx,\ T = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^l \rho F w^2 dx. \quad (5)$$

У цьому випадку для апроксимації переміщень використовуємо поліном 3-го порядку:

$$w(x) = \frac{w_i}{l^3}\left(2x^3 - 3x^2 l + l^3\right) + \frac{w_j}{l^3}\left(3x^2 l - 2x^3\right) +$$
$$+ \varphi_i\frac{1}{l^2}\left(xl^2 - 2x^2 l + x^3\right) + \varphi_j\frac{1}{l^3}\left(x^3 - x^2 l\right). \quad (6)$$

Для розв'язку задачі (2) використовувався ітераційний метод покоординатного спуску [4], застосування якого дозволяє уникати труднощів, пов'язаних з формуванням, зберіганням і оперуванням з матрицями мас і жорсткостей [5].

При поздовжніх коливаннях стрижня у формі клина або конуса першу власну форму коливань системи можна представити рівнянням:

$$u_1(x_1) = \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right),\ EFu_1'(0) = u_1(l) = 0. \quad (7)$$

Фізико-геометричні характеристики стрижнів змінюються за біноміальними законами [4]:

$$EF_1(x_1) = A(l_1 \pm x_1)^m,\ \rho F(x_1) = B(l_1 \pm x_1)^n,$$
$$A = EF_1 l_1^{-m},\ B = \rho F_1 l_1^{-n}, \quad (8)$$

де конусність і приведена довжина відповідно рівні [6]:

$$\lambda_1 = \frac{r_2}{r_1} > 1,\ l_1 = l(\lambda_1 - 1).$$

Для визначення основної власної частоти використовується формула Релея:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EF(u')^2 dx}{\int_0^l \rho F u^2 dx}. \quad (9)$$

Підставляючи (7), (8) в (9), одержимо відповідно при n=1 для клина і при n=2 для конуса:

$$\omega_1^2 = k_1^2\frac{E}{\rho}, \quad (10)$$

де характеристичні числа рівні:

$$k_1^2 = \frac{10(4l_1 + 3l)}{(5l_1 + 16l)l^2},\ n=1;$$

$$k_1^2 = \frac{7\left(20l_1^2 + 30l_1 l + 12l^2\right)}{\left(8l^2 + 35l_1 l + 56l_1^2\right)l^2},\ n=2. \quad (11)$$

При згинальних коливаннях консольних стрижнів з біноміальними законами зміни перерізів:

$$EI(x_1) = A(l_1 \pm x_1)^m,\ \rho F(x_1) = B(l_1 \pm x_1)^n. \quad (12)$$

$$A = EI_1 l_1^{-m},\ B = \rho F_1 l_1^{-n}. \quad (13)$$

Першу форму коливань можна представити наближеним рівнянням

$$w(x_1) = \left(1 - \frac{x_1}{l}\right)^2, \quad (14)$$

яке задовольняє тільки кінематичним граничним умовам:

$$w(0) = w'(0) = 0. \quad (15)$$

Формула Релея при згинальних коливаннях має вигляд

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EI(w'')^2 dx}{\int_0^l \rho F w^2 dx}. \quad (16)$$

Підставляючи (12), (14) в (16), одержимо для основної частоти формули:

$$\omega_1^2 = \tilde{\omega}_1^2\left[\frac{EI_1}{\rho F_1 l^4}\right] = \tilde{\omega}_1^2\frac{1}{\lambda_1^2 l^4}\left[\frac{EI_2}{\rho F_2}\right]. \quad (17)$$

В залежності від величини конусності стрижня й відношення $\frac{EI_1}{\rho F_1}$.

У формулах (17) частотний параметр $\tilde{\omega}_1^2$ виражається через приведену l_1 і реальну l довжини стрижня так:

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{30\left(4l_1^3 + 6l_1^2 l + 4l_1 l^2 + l^3\right)}{(6l_1 + l)l_1^2},\ n=1;$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{84\left(5l^4 + 10l_1^4 l + 10l_1^2 l + 5l_1 l^3 + l^4\right)}{\left(21l_1^2 + 7l_1 l + l^2\right)l_1^2},\ n=2. \quad (18)$$

Оцінимо вплив конусності (клиновидності) стрижня на основну частоту в числових прикладах.

Приклад 1.

Знайти основні частоти поздовжніх коливань конуса при конусності $\lambda_1 = 1;\ 1{,}2;\ 1{,}5;\ 2$.

За другою формулою (11) одержимо безрозмірні значення характеристичних чисел $k_1 l = 1{,}581;\ 1{,}711;\ 1{,}877;\ 2{,}09$.

Підставивши у формулу (9), можна одержати відповідні частоти.

Результати розрахунків порівнювались з точним розв'язком [6]:

$$k_1 l = 1{,}5;\ 1{,}688;\ 1{,}835;\ 2{,}03.$$

Приклад 2.

Визначити значення основних частот згинальних коливань консольного клина при наступних значеннях λ_1: λ_1=1, 2, 4.

За формулою (17) обчислюємо значення частотного параметра

$$\tilde{\omega}_1 = 4{,}474;\ 4{,}08;\ 4{,}21;\ 5{,}48.$$

Точні значення частотного параметра, отриманого в роботі [6], наступні:

$$\tilde{\omega}_1 = 3{,}52;\ -;\ 4{,}00;\ 4{,}61.$$

Із результатів розрахунків видно, що зі збільшенням клиновидності (конусності) значення основної частоти теж збільшуються.

Висновки і пропозиції. У роботі розглянуті задачі про коливання стрижневих конструкцій

ТЕХНІЧНІ НАУКИ

змінного перерізу. Для розв'язку завдань динаміки використовувався варіаційно-сітковий метод. Отримані вирази для визначення основних власних частот при поздовжніх і згинальних коливаннях стрижнів змінного перерізу. Результати розрахунків порівнюються з точним розв'язком. Досліджений вплив конусності на значення власних частот, що дає можливість проектувати стрижневі конструкції із заданими динамічними характеристиками. Розроблений підхід дозволить визначити динамічні характеристики стрижнів різного перерізу й може бути запропонований для інженерів-проектувальників конструкцій.

Список літератури:

1. Колодежний В. А. Збірник конкурсних задач з опору матеріалів: навч. посіб. / О. П. Заховайко, В. А. Колодежний, С. І. Трубачев. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 320 с.
2. Чемерис О. М. Будівельна механіка машин: навч посіб. / О. М. Чемерис, В. А. Колодежний, С. І. Трубачев. – К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. – 258 с.
3. Трубачев С. І. Теорія коливань та стійкості руху: навч. посіб. / А. Є. Бабенко, М. І. Бобир, О. О. Боронко, С. І. Трубачев. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 172 с.
4. Бабенко А. Є. Застосування й розвиток методу покоординатного спуску в задачах визначення напружено-деформованого стану при статичних та вібраційних навантаженнях / А. Є. Бабенко. – К.: КПІ, 1996. – 96 с.
5. Бабенко А. Е. Определение частотного спектра и собственных форм колебаний упругих систем методом повышения жесткостей / А. Е. Бабенко, О. А. Боронко, О. Н., С. И. Трубачев // Проблемы прочности. – 1990. – № 2. – С. 122–124.
6. Динник А. Н. Избранные труды / А. Н. Динник. – К.: изд-во АН УРСР, 1965. – 719 с.

Трубачев С.И., Колодежный В.А.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

Аннотация
Работа посвящена решению задачи о колебаниях стержней вариационно-сеточным методом. Получены выражения для определения основных собственных частот при продольных и изгибных колебаниях стержней переменного сечения. Приведены примеры расчетов продолбных и изгибных колебаний клиновидных и конусных стержней. Выполнено сравнение тестовых результатов с точным решением. Исследовано влияние клиновидности и конусности на значения собственных частот.

Ключевые слова: колебания, собственные частоты, собственные формы, стержни переменного сечения, вариационно-сеточный метод.

Trubachev S.I., Kolodezhnyi V.A.
National Technical University of Ukraine
«Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky»

DEFINITION OF OWN FREQUENCIES AND FORMS OF OSCILLATIONS OF A ROD

Summary
The work is devoted to solving the problem of the vibrations of rods variational-grid method. The expressions to identify major natural frequencies with longitudinal and flexural vibrations of variable cross-section rods. Examples of calculations prodolbyh and bending vibrations of tapered rods and cone. Comparison of test results with the exact solution. The effect of the wedge and taper on the values of natural frquecies.

Keywords: vibrations, natural frequencies, natural modes, variable cross-section rods, variational-grid method.