ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 517.977.8

ПРО МЕТОД РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Дехтярук О.М.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Чикрій А.О.
Національна академія наук України

Дане дослідження відноситься до одного з розділів математичної теорії керування, де розглядаються об'єкти, що рухаються, які функціонують в умовах конфлікту або невизначеності. Розглянуто квазілінійні конфліктно-керовані процеси загального вигляду з циліндричною термінальною множиною. Особливим є представлення розв'язку у вигляді суми довільної функції та блоку керування. Це дозволяє розглянути більш широкий клас динамічних задач. При дослідженні в якості базового використовується метод розв'язуючих функцій.
Ключові слова: конфліктно-керовані процеси, термінальна множина, керування, динамічна гра, втікач, переслідувач.

Постановка проблеми. Будемо розглядати класичні задачі переслідування та втечі, які є центральними в теорії конфліктно-керованих процесів. Вони були в основі виникнення теорії, є найбільш змістовними і представляють значний інтерес для дослідників. Поштовх до їх розвитку дали реальні прикладні задачі в економіці, космічній техніці, у воєнній справі, біології, медицині, тощо.

Конфліктно-керовані процеси це розділ математичної теорії керування, який вивчає керування рухомими керованими об'єктами, що функціонують в умовах конфлікту та невизначеності. Для визначення цього кола питань також використовують термін динамічні ігри, диференціальні ігри.

При цьому еволюція об'єкту може описуватися системами різницевих, звичайних диференціальних, диференціально-різницевих, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, системами рівнянь з розподіленими параметрами, системами рівнянь з дробовими похідними, імпульсним впливом та їх різними комбінаціями (гібридними системами).

Термін диференціальні ігри використовують стосовно ігор, в яких динаміка об'єкту описується системою звичайних диференціальних рівнянь. Якщо ж процес описується більш складними рівняннями, то вживають термін динамічні ігри. І, нарешті, конфліктно-керовані процеси – це найбільш загальний термін для визначення кола питань, що стосуються ігрових задач.

Розрізняють динамічні ігри двох або декількох гравців. Змістовно динамічні ігрові задачі можна описати наступним чином. Є динамічна система, в якій частина керуючих параметрів перебуває під контролем першого гравця (переслідувача), а інша частина контролюється другим гравцем (втікачем).

При постановці задачі, що стоїть перед першим або другим гравцем, припускають, що вибір керувань цього гравця, який гарантує йому досягнення певної мети при будь-якому заздалегідь невідомому керуванні супротивника, може спиратися лише на деяку інформацію про поточні стани системи або на інформацію про миттєві керування супротивника.

Першим, хто систематично досліджував динамічні ігри, був Р.Айзекс. Його монографія [1] поклала початок теоретичним дослідженням динамічних ігрових задач. Вона показала, що існує широке коло задач прикладного плану, які мають ігровий характер і не вкладаються в рамки сформованої теорії оптимального керування. Її цінність полягає в значній кількості постановок задач, які носять проблематичний характер. До них відносяться задачі з неповною інформацією, групами гравців та з фазовими обмеженнями, важливість та складність вирішення яких він неодноразово підкреслював.

Відрізняють динамічні гри двох типів – гри ступеню та гри якості [1]. На траєкторіях динамічної системи заданий деякий функціонал, що залежить від початкового стану та від керувань гравців.

В іграх першого типу мета першого гравця – мінімізувати цей функціонал, заданий на траєкторіях системи, мета іншого – максимізувати його. В іграх другого типу цим функціоналом є час виходу траєкторії об'єкту на задану термінальну множину і задача полягає в аналізі можливості виведення переслідувачем траєкторії системи на термінальну множину (задача зближення) чи відхилення втікачем траєкторії від цієї множини (задача відхилення).

Якщо ж рухи гравців незалежні, описуються окремими системами диференціальних рівнянь, то замість зближення-відхилення іноді вживають терміни переслідування-втечі. Відхиленню та втечі еквівалентний вираз уникнення сутичок.

Обмеження на керуючі параметри гравців можуть бути геометричними, інтегральними, імпульсними або змішаними. Можливі фазові обмеження на змінні, що визначають стан конфліктно-керованого процесу.

Відомі стратегії переслідування здебільшого розроблено для військового призначення. Їх можна розподілити на дві підгрупи:

- методи з фіксованим положенням необхідного направлення вектора швидкості відносно лінії переслідувач – втікач (до таких методів належать метод погонної кривої та метод постійного випередження);
- методи зі змінним положенням необхідного направлення вектора швидкості відносно лінії переслідувач – втікач (до таких методів належать метод пропорційного зближення та метод паралельного переслідування).

В якості базового методу при вивченні динамічних ігор використовується метод розв'язуючих функцій.

Для динамічних систем, еволюція яких описується інтегральним рівнянням, з циліндричною термінальною множиною при умові Л.С. Понтрягіна введена розв'язуюча функція, через неї визначено час закінчення гри. Особливістю основної схеми методу є та обставина, що час закінчення гри залежить від деякого селектора, вибір якого знаходиться у владі переслідувача.

Розв'язуюча функція характеризує хід гри. Коли в деякий момент часу інтеграл від неї перетворюється в одиницю, це означає попадання траєкторії на термінальну множину. Надаються достатні умови розв'язуваності задачі зближення з термінальною множиною. При цьому процес переслідування розбивається на два етапи.

На першому із них $[0,t_*)$, де t_* – момент перемикання, працює власне метод розв'язуючих функцій з використанням переслідувачем в кожен момент часу t всієї передісторії керування втікача $v_t(\cdot)$ (квазістратегії). Коли в момент t_* інтеграл від розв'язуючої функції стає рівним одиниці, процес переслідування перемикається на перший прямий метод Л.С. Понтрягіна і реалізується в класі контркерувань. Грубо кажучи, від моменту перемикання до розрахованого моменту закінчення гри «тягнеться» час, причому, на цій ділянці розв'язуюча функція вважається рівною нулю, так як накопичувати її більше немає сенсу.

Аппарат розв'язуючих функцій, які є, як правило, великими позитивними коренями квадратних рівнянь, виявився надзвичайно зручним і універсальним при вирішенні конкретних прикладів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В теорії конфліктно-керованих процесів (диференціальні ігри) разом з зворотніми процедурами Понтрягіна-Пшеничного [2; 3], правилом екстремального прицілювання Красовського [4] та ідеологією Айзекса [1], яка стосується основного рівняння теорії диференціальних ігор, існують ефективні методи, які можна виділити в окремий напрямок.

Це перший метод Понтрягіна та метод розв'язуючих функцій [5]. Їх об'єднує загальний принцип побудов керувань першого гравця на основі теореми вимірного вибору Філіппова-Кастена [6]. І хоча у авторському варіанті [2] в доведені використовувалась техніка ε-стратегій, П.Б. Гусятников та М.С. Нікольський використовували для доведення першого прямого методу принцип вимірного вибору. Метод розв'язуючих функцій виник внаслідок розв'язку ігрових задач втечі від групи переслідувачів.

В одній із робіт Б.Н. Пшеничного [3] на цій основі були сформульовані необхідні та достатні умови розв'язуваності задачі групового переслідування об'єктів з простим рухом і рівними максимальними швидкостями в оточенні. Це дало поштовх розвитку методів вирішення задач групового переслідування [5] на основі методики, яка використовує ідеологію розв'язуючих функцій.

Більшість ігрових задач з участю груп об'єктів, якими керуються, та динамікою, яка укладається в узагальнений контрольний приклад Понтрягіна, міститься в роботі [5]. При цьому часто динаміка об'єктів припускається однаковою, інакше розв'язок дуже ускладнюється.

З першим прямим методом Понтрягіна тісно пов'язаний метод розв'язуючих функцій [5].

Метод розв'язуючих функцій заснований на використанні обернених функціоналів Мінковського. Він дає пояснення класичного правила паралельного зближення, давно відомого інженерам-проектувальникам авіаційної та ракетної техніки на евристичному рівні.

Цей метод з успіхом застосовувався при різних формах умови Понтрягіна для дослідження ігрових задач з групами учасників, з термінальним функціоналом, з фазовими обмеженнями та неповною інформацією, а також для вивчення динамічних систем, які описуються рівняннями дробового порядку, та інших систем з більш складною динамікою, ніж звичайні диференціальні рівняння.

Для дослідження конфліктно-керованих процесів застосовується метод розв'язуючих функцій. Суть методу полягає в побудові по відомих параметрах процесу деяких числових функцій, що характеризують інтегрально хід конфліктно-керованого процесу, тобто ступінь близькості траєкторії до термінальної множини, і грають ключову роль при розв'язанні конкретних задач.

Оскільки розв'язуючі функції є опорними до визначальних багатозначних відображень, то апарат опуклого аналізу дозволяє їх будувати в аналітичному вигляді для досить широкого класу конфліктно-керованих процесів.

Привабливою стороною методу розв'язуючих функцій є той факт, що він дає повне обґрунтування класичного правила паралельного зближення, а також дозволяє ефективно використовувати сучасну техніку багатозначних відображень та їх селекторів в обґрунтуваннях ігрових конструкцій та отриманні на їх основі змістовних результатів.

При вирішенні конкретних ігрових задач на основі розв'язуючих функцій, важливої ролі набувають питання строгого обґрунтування методики. Тоді на передній план виходять проблеми, пов'язані з властивостями спеціальних багатозначних відображень, їх селекторів, які грають ключову роль при доведенні тверджень.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Отримані результати базуються на використанні формули Коші, що не завжди є зручним, та не охоплюють весь клас функціонально-диференціальних систем.

Мета статті. Головною метою цієї роботи є модифікація методу розв'язуючих функцій шляхом його узагальнення для складних динамічних, функціонально-диференціальних систем.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описується рівністю:

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau, t \geq 0. \quad (1)$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t), g: R_+ \to R^n$, $R_+ = \{t : t \geq 0\}$ вимірна по Лебегу і обмежена при $t>0$, матрична функція $\Omega(t,\tau), t \geq \tau \geq 0$, вимірна по t сумується по τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задається функцією $\varphi(u,v), \varphi: U \times V \to R^n$, яка вважається неперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непорожніх компактів U та V, тобто $U \in K(R^m), V \in K(R^l), m, l, n$ – натуральні числа.

Керування гравцями $u(\tau), u: R_+ \to U$, і $v(\tau), v: R_+ \to V$, – вимірні функції часу.

Крім процесу (1), задано термінальну множину M^*, яка має циліндричний вигляд:

$$M^* = M_0 + M, \quad (2)$$

де M_0 – лінійний підпростір із R^n, а $M \in K(L)$, де L – ортогональне доповнення до M_0 в R^n.

Цілі першого (u) та другого (v) гравців протилежні. Перший намагається вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину за найкоротший час, а інший – максимально відтягнути момент потрапляння траєкторії на множину M^* або взагалі уникнути зустрічі.

Представлення розв'язку динамічної системи вигляду (1) дозволяє в єдиній схемі розглянути широке коло функціонально-диференціальних систем, які функціонують в умовах конфлікту, зокрема, систем інтегральних, інтегро-диференціальних, диференціально-різницевих, а також систем рівнянь з класичними дробовими похідними Рімана-Ліувілля, регуляризованими дробовими похідними Капуто. Аналогічне представлення в дискретній ситуації дає можливість досліджувати багатокрокові процеси та імпульсні системи.

Приймемо сторону першого гравця і будемо орієнтуватися на вибір противником в якості керування довільної вимірної функції, яка приймає значення із V. Вважаємо, якщо гра (1), (2) відбувається на інтервалі $[0,T]$, то керування першого гравця в момент t вибираємо на основі інформації про $g(T)$ та $v_t(\cdot)$, тобто у вигляді вимірної функції:

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), t \in [0,T], u(t) \in U, \quad (3)$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0,t]\}$ – передісторія керування дорогого гравця до моменту t, або у вигляді контркерування:

$$u(t) = u(g(T), v(t)), t \in [0,T], u(t) \in U. \quad (4)$$

Обговорювати окремо питання фізичного виконання при керуванні вигляду (3) тут не є доцільним. Відповідь на нього буде автоматично випливати з конструктивного способу побудови керування першого гравця в подальшому при доведенні тверджень.

Зокрема, якщо $g(t) = e^{At}z_0, \Omega(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} – матрична експонента, то формула (1) є відомою формулою Коші для квазілінійного конфліктно-керованого процесу. Керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію, а контркерування $u(t) = u(z_0, v(t))$ – передписано стробаскопічною стратегією Хайєка.

Проміжки часу $[0, t_*)$ та $[t_*, T]$ називаються «активним» та «пасивним» відповідно. Опишемо спосіб керування першим гравцем на кожному з них. Для цього розглянемо компактнозначне відображення:

$$U(\tau, v) = \{u \in U : \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v) - \gamma(T,\tau) \in$$
$$\in \alpha(T,\tau,v)[M - \xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot))]\}, \tau \in [0,T], v \in V. \quad (5)$$

В силу теореми про обернений образ воно $L \times B$-вимірне, а значить, відповідно до теореми вимірного вибору в багатозначному відображенні $U(\tau, v)$ існує хоча б один $L \times B$-вимірний селектор $u(\tau, v)$, який є суперпозиційно вимірною функцією. Позначимо $u(\tau) = u(\tau, v(\tau))$. Керування першого гравця на «активному» проміжку покладемо рівним $u(\tau)$.

Розглянемо «пасивний» проміжок часу $[t_*, T]$. Покладемо у виразі (5) при $\tau \in [t_*, T]$, $v \in V$, розв'язуючу функцію $\alpha(T,\tau,v) \equiv 0$. Отримаємо багатозначне відображення:

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U : \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v) - \gamma(T,\tau) = 0\}. \quad (6)$$

Як і в попередньому випадку, із теореми про вимірний селектор випливає, що в $L \times B$-вимірному замкнутому відображенні $U_0(\tau, v)$ існує $L \times B$-вимірний селектор. Позначимо його і керування переслідувача на «пасивному» проміжку виберемо рівним $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$. У випадку $\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot)) \in M$ керування першого гравця виберемо на всьому проміжку $u_0(\tau, v)$ у вигляді $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$, де $u_0(\tau, v)$ – вимірний селектор багатозначного відображення $U_0(\tau, v)$.

Висновки і пропозиції. Отже, виконано модифікацію методу розв'язуючих функцій, яка полягає узагальненні опису еволюції конфліктно-керованого процесу, що дозволяє поширити використання методу на більш широкий клас функціонально-диференціальних систем, які функціонують в умовах гри або конфлікту. Визначено, що при виборі керувань переслідувача на «активному» і «пасивному» проміжках по вказаних правилах траєкторія конфліктно-керованого процесу буде приведена на термінальну множину в момент Т при будь-яких допустимих керуваннях другого гравця.

Подальші дослідження полягають в знаходженні необхідних та достатніх умов закінчення диференціальної гри.

Список літератури:

1. Isaacs R. Differential games. – New York: J. Wiley and Sons, 1965. – 480 p.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды, Т. 2. – М.: Наука, 1988. – 576 с.
3. Пшеничный Б.Н. Остапенко В.В., Дифференциальные игры. – К.: Наукова думка, 1992. – 260 с.
4. Красовский Н.Н., Игровые задачи о встрече движений. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
5. Chikrii A. Conflict-controlled processes. – Boston, London, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 424 p.
6. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

Дехтярук О.Н.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
Чикрий А.А.
Национальная академия наук Украины

О МЕТОДЕ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Аннотация
Данное исследование относится к одному из разделов математической теории управления, где рассматриваются движущиеся объекты, функционирующие в условиях конфликта или неопределенности. Рассмотрены квазилинейные конфликтно-управляемые процессы общего вида с цилиндрическим терминальным множеством. Особым является представление решения в виде суммы произвольной функции и блока управления. Это позволяет рассмотреть более широкий класс динамических задач. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций.
Ключевые слова: конфликтно-управляемые процессы, терминальное множество, управление, динамическая игра, беглец, преследователь.

Dekhtiaruk O.M.
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»
Chikrii A.O.
National Academy of Sciences of Ukraine

ABOUT THE METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS IN GAMING DYNAMICS PROBLEMS

Summary
This study refers to one of the sections of mathematical control theory, which deals with moving objects that operate in conflict or uncertainty. Considered quasi-linear conflict-controlled processes of general form of a cylindrical terminal set. The special is presentation of solution as the sum of an arbitrary function and control unit. It allows to consider a wider class of dynamic problems. The study uses the method of resolving functions as base.
Keywords: conflict-controlled processes, terminal set, management, dynamic game, evader, pursuer.