

## МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ У ВИРІШЕННІ ПРОБЛЕМ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ НЕСТАБІЛЬНОСТІ НА РИНКУ ПРАЦІ РОБОЧОЇ СИЛИ І ВІЛЬНИХ РОБОЧИХ МІСЦЬ

Журавка А.В.

Харківський національний університет будівництва та архітектури

Мудаширу Тайо Мусбау

Харківський національний університет радіоелектроніки

Однією з головних складової зайнятості, що формують попит на робочу силу, є система зайнятості і динаміка робочих місць. Зайнятість є наслідком наявності робочих місць і стимулів, що визначають масштаби і співвідношення попиту та пропозиції робочої сили. Структура зайнятості в економіці в цілому повторює структуру робочих місць. Але для досягнення повної зайнятості необхідна збалансованість між робочою силою і наявністю вільних робочих місць. У статті побудовано модель взаємодії робочої сили і вільних робочих місць на ринку праці. Пророблено детальний якісний аналіз цієї моделі, цілком досліджені біфуркаційні особливості, що приводять до небезпечних (не стійких) режимів функціонування ринку праці. Знайдені умови існування стійкого стану динаміки безробітного населення і вільних робочих місць. Таким чином, розроблено інструментарій, що дозволяє прогнозувати рівноважні рівні безробітного населення і вільних робочих місць.

**Ключові слова:** ринок праці, динаміка безробітного населення, динаміка вільних робочих місць, стійкий вузол, біфуркації типу «сідло-вузол».

**Постановка проблеми.** Однією з головних складової зайнятості, що формують попит на робочу силу, є система зайнятості і динаміка робочих місць. Зайнятість є наслідком наявності робочих місць і стимулів, що визначають масштаби і співвідношення попиту та пропозиції робочої сили. Структура зайнятості в економіці в цілому повторює структуру робочих місць. Наявність вільних робочих місць є основною умовою існування попиту на робочу силу. Перехід до ринкової економіки висуває нові вимоги до політики зайнятості. Досягнення оптимально високої, економічно ефективною і соціально обґрунтованою зайнятості є невід'ємною і найважливішою складовою частиною процесу відновлення і подальшого підйому української економіки. Так, при економічному підйомі інтенсифікуються процеси створення нових робочих місць і підготовки нових кваліфікованих кадрів, поліпшуються умови оплати праці, зменшується рівень безробіття і збільшується зайнятість населення, що веде до росту чисельності робочої сили й інтенсивності її відтворення. У системі зайнятості велику роль грає приховане безробіття. Тому потенціал розширення зайнятості можна розглядати тільки при відсутності прихованого безробіття. Регіональні центри зайнятості при розробці програм сприяння зайнятості часто роблять оцінку вартості підтримки робочого місця і створення нового. Відомо, що витрати на створення нового робочого місця в десятки разів перевищують витрати на підтримку вже існуючого. Однак звідси не слід робити висновок про те, що не потрібно створювати нові робочі місця, а досить лише підтримувати на належному рівні вже існуючі. Політика в області розвитку системи робочих місць повинна бути досить гнучкою і враховувати специфіку окремих галузей і виробництв. Необхідно створювати нові робочі місця в перспективних галузях. У цьому випадку, крім пошуку необхідних інвестицій, проблема доповнюється задачею перепідготовки кадрів, тому що рівень професійної підготовки робочих масових професій часто не

відповідає перспективним вимогам. Як уже було сказано, зайнятість є наслідком наявності робочих місць. Щоб стимулювати зайнятість, необхідно збільшувати кількість робочих місць за рахунок створення нових і підтримки вже існуючих, але з урахуванням відтворення робочої сили.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблеми прогнозування рівноважних рівнів макроекономічних показників останнім часом поділяється велика увага. Важливим аспектом прогнозування є сучасні концепції конкуренції та кооперації [1, 2]. Ці погляди сучасної економічної теорії є джерелом та розвитком формування постнеокласичної синергетичної парадигми яка впливає з праць вітчизняних та зарубіжних вчених [3-23].

**Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми.** Таким чином, для визначення умов досягнення макроекономічної стабільності з'являється задача розробки інструментарію, який дозволив би прогнозувати збалансованість між робочою силою і наявністю вільних робочих місць.

**Формування цілей статті.** Таким чином, основною метою роботи є розробка інструментарію (динамічної математичної моделі), що дозволить прогнозувати рівноважні рівні безробітного населення і вільних робочих місць, здійснювати пошук умов існування стійкого стану динаміки безробітного населення і вільних робочих місць, досліджувати умови існування біфуркаційних особливостей, що приводять до небезпечних (не стійких) режимів функціонування ринку праці.

**Виклад основного матеріалу.** У нашій моделі припустимо, що ріст робочої сили приведе до недовикористання трудових ресурсів, тобто з ростом робочої сили буде зменшуватися кількість вільних робочих місць, а отже, збільшиться навантаження на одне вільне робоче місце, і навпаки – при збільшенні вільних робочих місць буде зменшуватися кількість фахівців, що конкурують за ці робочі місця. Тому для досягнення повної зайнятості необхідна збалансованість між робочою силою і наявністю вільних робочих місць.

Взаємодія між чисельністю робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця ( $L$ ), і кількістю вільних робочих місць ( $P$ ) відповідно до вищесказаного можна представити у виді системи двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = \beta L(L_{cm} - L) - \alpha P \\ \frac{dP}{dt} = \gamma P(P_{cm} - P) - \delta L \end{cases} \quad (1)$$

де  $L_{cm}, P_{cm}$  – стаціонарні рівні робочої сили, що конкурують за вільні робочі місця (при  $P = 0$ ) і вільних робочих місць (при  $L = 0$ );  $\alpha$  – коефіцієнт убавання робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця з появою нових робочих місць;  $\delta$  – коефіцієнт убавання вільних робочих місць при тиску на них робочої сили;  $\beta, \gamma$  – коефіцієнти стримування росту робочої сили, що конкурують за вільні робочі місця, і росту вільних робочих місць.

Проведемо якісний аналіз динамічної системи (1), за допомогою перетворень  $x = 1 - \frac{L}{L_{cm}}, y = 1 - \frac{P}{P_{cm}}, 0 \leq x, y \leq 1, t' = \beta L_{cm} t$  динамічна система (1) приводиться до виду.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1) - a_1(y-1) \\ \frac{dy}{dt} = a_2 y(y-1) - a_3(x-1) \end{cases} \quad (2)$$

де  $a_1 = \frac{\alpha P_{cm}}{\beta L_{cm}}, a_2 = \frac{\gamma P_{cm}}{\beta L_{cm}}, a_3 = \frac{\delta}{\beta P_{cm}}$  – безрозмірні позитивні параметри.

Із динамічної системи (2) відразу ж випливає наявність одиначної особливої точки  $(x_*, y_*) = (1, 1)$ . Інші три особливі точки знаходяться із рішення кубічного рівняння

$$x^3 - x^2 + a_1 x - \frac{a_3 a_1^2}{a_2} = 0, \quad (3)$$

Матриця лінеаризованої системи (2) в довільній особливій точці  $(x_*, y_*)$  має вид

$$A = \begin{bmatrix} 2x_* - 1 & -a_1 \\ -a_3 & a_2(2y_* - 1) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Детермінант і слід цієї матриці відповідно має вид

$$\det A = a_2(2x_* - 1)(2y_* - 1) - a_1 a_3 \quad (5)$$

$$\text{tr} A = 2x_* - 1 + a_2(2y_* - 1) \quad (6)$$

При  $\text{tr} A = 0, \det A = 2x_* - 1 + a_2(2y_* - 1)$  звідки витікає відсутність біфуркації народження циклу в системі, що розглядається (відсутність автоколебальних режимів). Біфуркація сідлового типу (типу вузол-сідро) відбувається у випадку, коли детермінант (5) дорівнює нулю.

Характеристичне рівняння в одиначній особливій точці

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -a_1 \\ -a_3 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(a_2 - \lambda) - a_1 a_3 = 0, \quad (7)$$

де  $I$  – одиначна матриця,  $\lambda$  – власні числа матриці  $A$ , зводиться до квадратного рівняння

$$\lambda^2 - (1 + a_2)\lambda + a_2 - a_1 a_3 = 0, \quad (8)$$

рішення якого має вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + a_2 \pm \sqrt{(a_2 - 1)^2 + 4a_1 a_3}). \quad (9)$$

Тут при  $a_1 a_3 > a_2$  ( $\det A < 0$ ) маємо  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  і приходимо до нестійкої особливої точки типу сідло, при  $a_1 a_3 \leq a_2$  ( $\det A \geq 0$ ) приходимо до нестійкого вузла.

Таким чином, одиначна особлива точка при будь-яких параметрах нашої системи являється нестійкою. Вона відповідає нульовим значенням чисельності робочої сили ( $L_* = 0$ ) та кількості вільних робочих місць ( $P_* = 0$ ).

Для більш детального аналізу біфуркацій динамічної системи (2) скористуємося параметричним методом побудови біфуркаційних (граничних) кривих. Для цього, як і раніше, позначимо довільну особливу точку системи (2) через  $(x_*, y_*)$ , тоді будемо мати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_*(x_* - 1) - a_1(y_* - 1) = 0 \\ a_2 y_*(y_* - 1) - a_3(x_* - 1) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Виразимо параметр  $a_1$  через  $y_*$

$$a_1 = \frac{a_2}{a_3} \left[ 1 + \frac{a_2}{a_3} y_*(y_* - 1) \right] y_*. \quad (11)$$

Гранична крива області параметрів, при яких існують три різних стани рівноваги, крім одиначне, визначається із умови  $\frac{da_1(y_*)}{dy_*} = 0$ , відкіля

шукана крива має наступний параметричний вид

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a_2}{a_3} \left[ 1 + \frac{a_2}{a_3} y_*(y_* - 1) \right] y_* \\ a_2 = \frac{a_3}{y_*(2 - 3y_*)} \end{cases} \quad (12)$$

При виключенні з (12) параметру  $\frac{a_2}{a_3}$ , прийдемо до остаточного виразу

$$a_1 = \frac{1 - 2y_*}{(3y_* - 2)^2}, \quad a_2 = \frac{a_3}{y_*(2 - 3y_*)}. \quad (13)$$

Можна показати, що ця крива збігається з параметричним представленням границі сідел ( $\det A = 0$ ).

Виключаючи параметр  $y_*$  з виразу (13), прийдемо до не параметричного завдання цієї кривої

$$a_1 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\left[ 1 \mp 2 \sqrt{1 - \frac{3a_3}{a_2}} \right]}{\left[ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{3a_3}{a_2}} \right]^2} \quad (14)$$

Можна показати, що вираз (14) еквівалентно виразу, яке одержано при прирівнюванні до нуля дискримінанта кубічного рівняння (10). Щоб показати це, приведемо рівняння (10) за допомогою заміни  $x = y + \frac{1}{3}$  до виду

$$\begin{cases} y^3 + py + q = 0, \quad p = a_1 - 1/3, \\ q = 1/3 a_1 - \frac{a_3 a_1^2}{a_2} - \frac{2}{27}. \end{cases} \quad (15)$$

Дискримінант одержаного кубічного рівняння має вид  $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ . Після прирівнювання його до нуля, одержимо

$$\frac{1}{27} (a_1 - \frac{1}{3})^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} a_1 - \frac{a_3 a_1^2}{a_2} - \frac{2}{27} \right)^2 = 0 \quad (16)$$

Ми не будемо строго доводити тотожності виразів (15) і (16), а перевіримо їх при деяких характерних значеннях параметрів, наприклад, при  $a_2 = 3a_3, a_1 = 1/3; a_3 = 5/3, a_2 = 9, a_1 = 7/25$ . Така перевірка вказує на тотожність вищевказаних виразів. Вони говорять про збігові двох дійсних коренів кубічного рівняння (10). В залежності від знаку у виразі (14) для трьох дійсних

коренів можливі два варіанти попарного їх збігу (виродження).

Для якісного аналізу динамічної системи (2) необхідно мати уявлення про її ізокліни (лінії рівного нахилу дотичних). Щоб їх одержати, розділимо одне рівняння системи (2) на інше

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 y(y-1) - a_3(x-1)}{x(x-1) - a_1(y-1)} \quad (17)$$

У фазовій площині (x, y) звичайно розглядають дві характерні ізокліни. У випадку  $\frac{dy}{dx} = 0$  розглядають ізокліну горизонтальних дотичних (нульову ізокліну)

$$a_2 y(y-1) - a_3(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{a_2}{a_3} y(1-y) \quad (18)$$

У випадку  $\frac{dy}{dx} = \infty$  розглядають ізокліну вертикальних дотичних

$$x(x-1) - a_1(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1 - \frac{x(1-x)}{a_1} \quad (19)$$

Розглянемо найбільш загальний випадок двох симетричних ізоклін, які мають чотири точки пересічення. Ці точки пересічення є також особливими точками динамічної системи (2). Отже, візьмо наступні значення параметрів нашої динамічної системи:  $a_1 = 1/4, a_2/a_3 = 4$ . У цьому випадку ізокліни (18, 19) має вигляд  $x = 1 - 4y(1-y), y = 1 - 4x(1-x)$  (рис 1).

Раніше ми показали в загальному випадку, що одинична особлива точка  $(x_*, y_*) = (1, 1)$  являється нестійкою. Друга особлива точка, яка лежить на прямій  $y = x$ , має вид  $(x_*, y_*) = (1/4, 1/4)$ . Дослідимо її на стійкість. Матриця (4) в даному випадку має вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -a_2 & -a_2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

звідки характеристичне рівняння  $|A - \lambda I| = 0$  приводить до наступних власних значень

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1+a_2) \pm \sqrt{1+a_2^2 - a_2}}{4} \quad (21)$$

Легко показати, що  $\lambda_1 < 0$  і  $\lambda_2 < 0$  і, отже, особлива точка  $(1/4, 1/4)$  являється стійким вузлом. Вихідних перемінних  $L_* = 3/4, P_* = 3/4$ . Незавжно показати, що дві інші, симетричні відносно прямої  $y = x$ , особливі точки:  $(0,655; 0,095)$  і  $(0,095; 0,655)$  являються сідлами, тобто нестійкими точками. Напрямок сепаратрис для сідлових точок задається власними векторами матриці A лінеаризованої системи. Дана ситуація ілюструється розрахунковим фазовим портретом динамічної системи (2) при  $a_1 = 1/4, a_2 = 1, a_3 = 1/4$  (рис. 2). Фазова траєкторія  $y = x$  (діагональ квадранта) являється рішенням вихідної системи в фазовій площині (17). Ця траєкторія, а також сепаратиси на рис. 2 не показані.

Ці виродження і відповідні скачки відбуваються на біфуркаційній множині  $\psi(a_1, a_2, a_3) = 0$ , яка нами була отримана вище різними способами (14, 16). Фазовий портрет, показаний на рис. 2, являється перевернутим відображенням фазового портрету динамічної системи

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y) - a_1 x, \quad \frac{dx}{dt} = -a_2 y + a_3 x(1-x) \quad (22)$$

при  $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = 1$ .

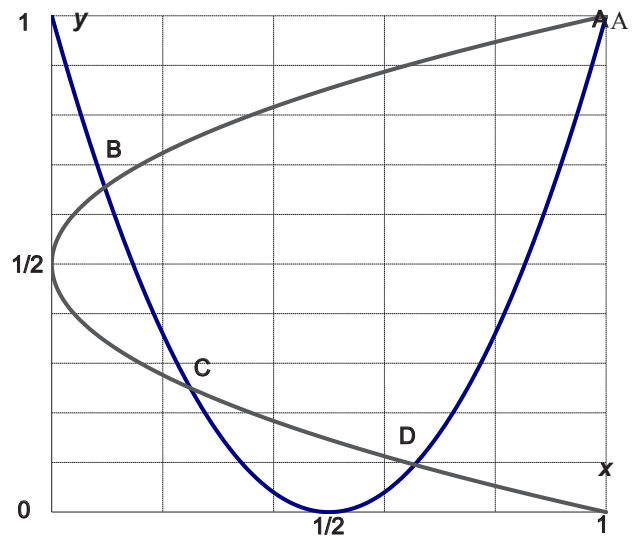


Рис. 1. Ізокліни (18) і (19) при  $a_1 = \frac{1}{4}, \frac{a_2}{a_3} = 4$

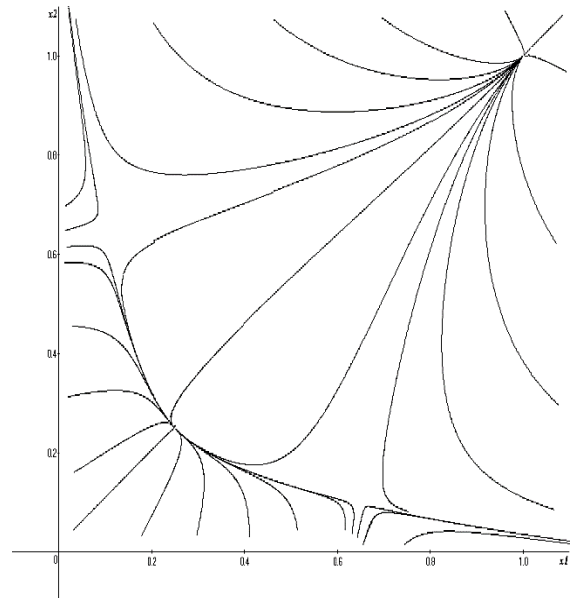


Рис. 2. Фазовий портрет динамічної системи (2)

при  $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{4}, x_1 = x, x_2 = y$

Аналіз результатів числових експериментів показав (рис. 2), що область, обмежена двома симетричними сепаратрисами і сторонами одиничного квадрата являється аттрактором стійкої особливої точки  $(1/4, 1/4)$ . Діагональ квадрата, яка виходить з одиничної особливої точки, яка являється аттрактором і фазовий портрет симетричний відносно цієї діагоналі. При зближенні стійкої і не стійкої (сідлової) точки область притягання (аттрактор) поступово зменшується і повністю зникає при виродженні стійкої точки. В нестійких областях (рис. 2), в околиці сідлових точок, відмічається швидкий вихід фазових кривих на границі одиничного квадрата ( $x = 1, y = 1$ ) через 5-6 часових кроків. При досягненні траєкторією сторони квадрата  $x=1$  поведінка динамічної системи визначається другим рівнянням системи (2), яке у випадку має стійку стаціонарну точку  $y_* = 0$ . Ця ситуація відповідає  $P_* = P_{ст}, L_* = 0$ . При досягненні траєкторією сторони квадранта

$y = 1$  поведінка динамічної системи визначається першим рівнянням системи (2), яке в цьому випадку має стійку стаціонарну точку  $x_* = 0$ . Ця ситуація відповідає  $P_* = 0, L = \text{Lst}$ .

В ситуації, показаній на рис. 2, особлива точка (1,1) являється нестійким вузлом. Числові експерименти показують, що в околиці обох вузлів спостерігається повільний ріст фазових перемінних  $x$  і  $y$  з максимальним значенням росту в центральній частині діагоналі (при розгляданні руху по фазовій траєкторії  $y = x$ ), що приводить до увігнуто-опуклих кривих  $x(t)$  і  $y(t)$ .

Якщо для вузлових точок рух в їх околиці достатньо повільно, то для сідлових точок відсувається короточасне уповільнення швидкості руху в їх околиці з подальшим швидким видаленням від них. За 5-10 часових кроків траєкторії ідуть практично на нескінченність (у відсутності обмежень на фазові перемінні) при рішенні динамічної системи методом Рунге-Кутта, в той же час вихід в стійку вузлову точку відбувається приблизно через 15 часових кроків.

У випадку пересічення ізоклін (19) і (20), наведеному на рис. 3, чисельний фазовий портрет динамічної системи наведено на рис. 4. Тут бачимо, як фазові траєкторії, попадає в поле впливу сідлової точки В, ідуть вузькими пучками на стороні  $y = 1$  і  $x = 1$  одиничного квадрата, який розглядається.

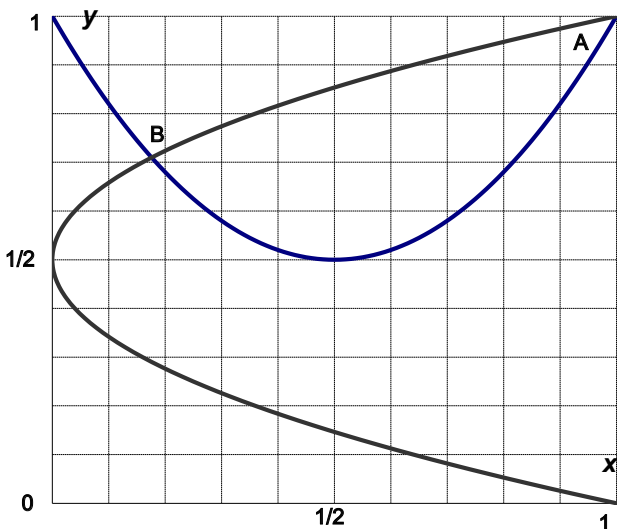


Рис. 3. Ізокліни (19) і (20) при  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{4}$

У випадку виродження стійкої точки С (збіг її з сідлом D), показаним на рис. 5, фазовий портрет динамічної системи (2) приведено на рис. 6. Тут сідлові особливості, характерні для точок В і D (рис. 1, 2) зберігаються. На цьому рисунку добре видно рух по ізокліні (19).

Числові розрахунки біфуркаційних кривих (15) при різних значеннях  $a_3$  показано на рис. 7, при цьому біфуркаційна крива при  $a_3 = 5/3$  відповідає виродженню випадку, показаному на рис. 5 і 6.

Відмітимо, що великий теоретичний інтерес представляє пошук складних стохастичних режимів і динамічних нестійкостей в околиці лінії біфуркації динамічної системи при малих періодичних флуктуаціях параметрів цієї системи.

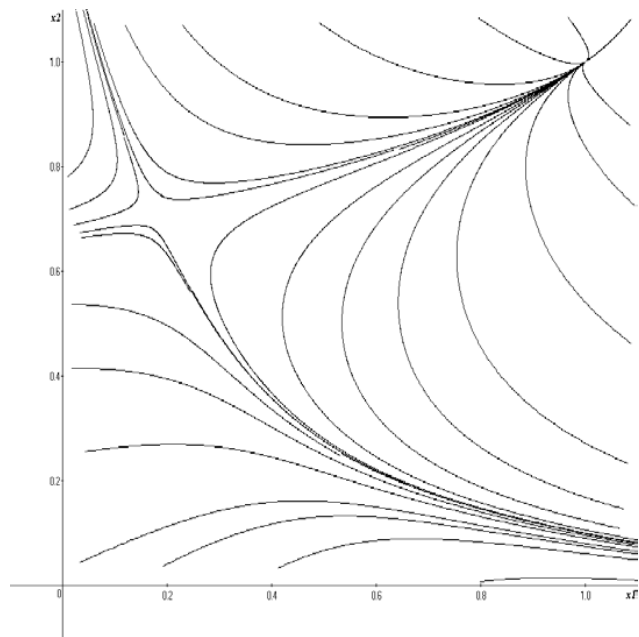


Рис. 4. Фазовий портрет динамічної системи (2)

при  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = 1, x_1 = x, x_2 = y$

У випадку системи (2), через відсутність в ній не грубих періодичних рухів (лінії петлі сепаратрис сідла та ін.) не відмічається появи гомоклінічних структур, що притягають, та відповідних їм стохастичних режимів при малих неавтономних періодичних обуреннях автономної динамічної системи. При таких збуреннях в числових експериментах на близькій динамічній системі (23) на лінії сідло-вузел було відмічено виникнення динамічних нестійкостей при деякій критичній амплітуді збурень (раптове виникнення дисциплінарних рішень, що розходяться), причому ця амплітуда залежала від розташування початкової точки в стійкій області фазової площини (атракторне сідло-вузла).

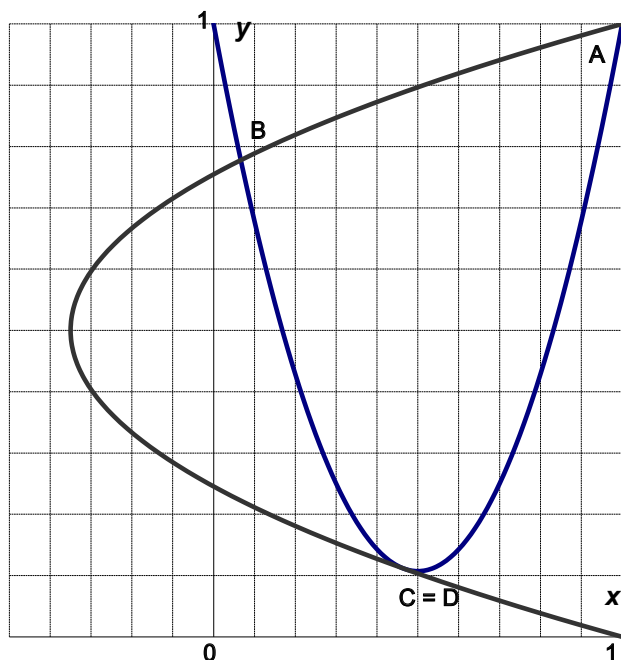


Рис. 5. Ізокліни (19) і (20) при  $a_1 = \frac{7}{25}, a_2 = 9, a_3 = \frac{5}{3}$

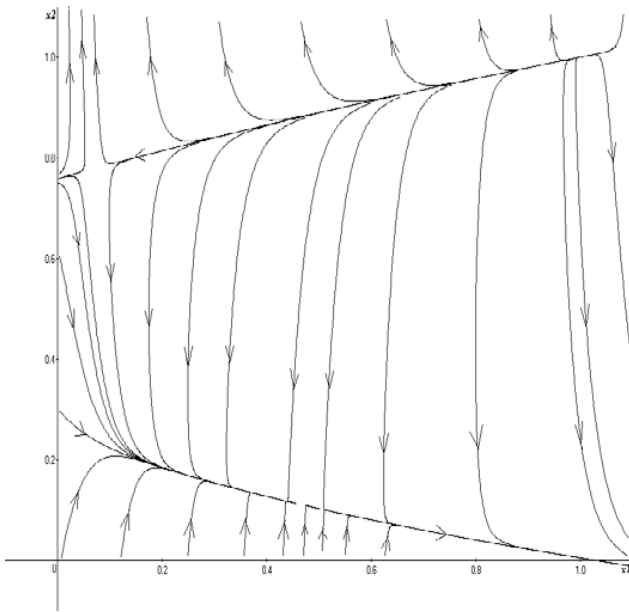


Рис. 6. Фазовий портрет динамічної системи (2)

при  $a_1 = \frac{7}{25}, a_2 = 9, a_3 = \frac{5}{3}, x_1 = x, x_2 = y$

Чим ближче була початкова точка до складної особливої точки, тим менше була критична амплітуда. З іншого боку, чим далі була віддалена початкова точка від особливої точки (в області її атрактора), яка відповідала біфуркаційному незбуреному параметру, тим вона була більш стійкою до збурення цього параметру (у значенні більш пізнього виникнення зривів траєкторій).

Природно, що аналогічна ситуація буде спостерігатися і для нашої системи при розгляданні біфуркаційної кривої, заданої одним із виразів (15, 17), і задані осциляційного параметра, наприклад, параметра  $a_2(t)$ , у вигляді:  $a_2(t) = a_2(1 + \tilde{A} \sin \frac{2\pi}{T} t)$ , де  $\tilde{A}$  і  $T$  – амплітуда і період коливань,  $a_2 = \overline{a_2(t)}$  – усереднений за періодом коливань  $T$  параметр, який лежить на біфуркаційній кривій (як відмічалось раніше, на цій кривій, наприклад, лежать значення параметрів  $a_1: a_1 = 7/25, a_2 = 9, a_3 = 5/3$ ).

Показано, що з чотирьох особливих точок динамічної системи (2) тільки одна є стійкою, і отже, реальна економічна система при своєму розвитку прагне до динамічної рівноваги, визначеній координатами цієї стійкої точки, що відповідає стабілізації робочої сили і вільних робочих місць на деяких стаціонарних (постійних) рівнях, що залежать від параметрів вихідної системи. При зміні цих параметрів може відбуватися виродження особливої стійкої точки (зближення і збіг з однією із сідлових точок, що відповідає біфуркації типу «вузол-сідло» і приводить до раптового стрибка зі стійкої точки в нескінченність), що відповідає відомим у літературі математичним катастрофам.

В області притягання до стійкої особливої точки виділяються два важливих режими поведіння розглянутої динамічної системи, що мають наступну економічну інтерпретацію, якщо звернутися до вихідних розмірних перемінних:

1. Ліворуч від особливої точки (рис. 2) відбувається спад чисельності робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця, і відповідний йому спочатку спад вільних робочих місць, а потім їхній ріст;

2. Праворуч від особливої точки (рис. 2) відбувається ріст чисельності робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця, і відповідний йому спочатку ріст вільних робочих місць, а потім їхній спад.

Зробимо висновок і визначимо перспективи подальшого дослідження у цьому напрямку.

**Висновки і пропозиції.** Побудовано модель взаємодії робочої сили і вільних робочих місць на ринку праці. Пророблено детальний якісний аналіз цієї моделі, цілком досліджені біфуркаційні особливості цієї моделі, що приводять до небезпечних (не стійких) режимів функціонування ринку праці. Знайдені умови існування стійкого стану динаміки безробітного населення і вільних робочих місць. Наступним кроком дослідження є чисельне моделювання, що включає ідентифікацію параметрів моделі на основі даних офіційної статистики і каліброваної процедури. Таким чином, розроблено інструментарій, що дозволяє прогнозувати рівноважні рівні безробітного населення і вільних робочих місць.

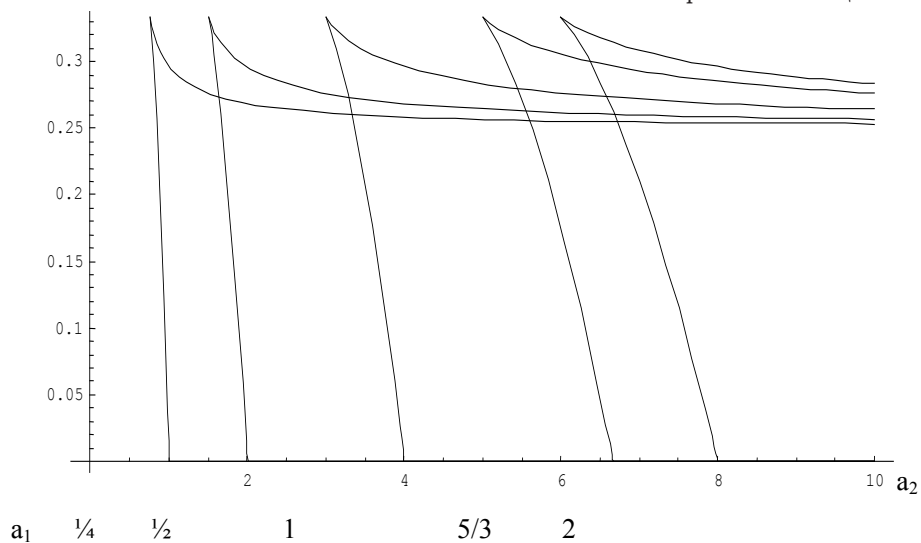


Рис. 7. Біфуркаційні криві (15) при різних значеннях параметра  $a_3$

**Список літератури:**

1. Журавка А.В., Московкін В.М., Елеоджо О. Сутність процесів кооперації в соціально-економічних системах [Електронний ресурс] // Економіка. Управління. Інновації. Житомир: 2014. – Випуск № 1(11).
2. Журавка А.В., Московкін В.М., Елеоджо О. Сутність процесів конкуренції в соціально-економічних системах [Електронний ресурс] // Економіка. Управління. Інновації. Житомир: 2013. – Випуск № 1(9).
3. Московкин В.М., Журавка А.В. Пьер-Франсуа Верхульст – забытый первооткрыватель закона логистического роста и один из основателей экономической динамики // Наука та наукознавство. – К., 2003. – № 2. – С. 75-84.
4. Кондратьев Н.Д. Проблемы экономической динамики. – М.: Экономика, 1989. – 528 с.
5. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 336 с.
6. Журавка А.В. Концепция моделирования конкурентных взаимодействий в теории экономической динамики // Радиоэлектроника и информатика. – Х., 2001. – № 4. – С. 82-88.
7. Журавка А.В. Математическое моделирование взаимодействий на общем рынке труда и капитала // Економіка: проблеми теорії та практики. – Дніпропетровськ, 2002. – Вип. 131. – С. 50-53.
8. Журавка А.В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий (Социально-экономические системы) // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 1-2. – С. 49-51.
9. Журавка А.В. Численный анализ трехмерной модели конкурентно-кооперационных взаимодействий (Социально-экономические системы) // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 7-8. – С. 35-37.
10. Журавка А.В., Московкин В.М. Математическая модель роста количества инновационно-ориентированных фирм // Науковий вісник будівництва. – Х., 2001. – № 15. – С. 286-289.
11. Журавка А.В., Московкин В.М. Нелинейная модель динамики занятого населения и анализ устойчивости ее равновесных состояний // Вестник Международного Славянского университета. – Серия «Экономика. Социология». – Х., 2002. – Том 5, № 3. – С. 32-34.
12. Журавка А.В., Московкин В.М. Математическое моделирование потоков рабочей силы на общем рынке труда двух территориальных образований // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – Випуск № 11'2. – 2002. – С. 31-35.
13. Журавка А.В., Московкин В.М. Трехмерная модель когерентных кооперационных взаимодействий в социально-экономических системах // Економіка: проблеми теорії та практики. – Дніпропетровськ, 2002. – Вип. 145. – С. 50-53.
14. Журавка А.В., Шевченко Л.П. Концептуальные проблемы экономической динамики // Тези доповідей VII Всеукраїнської науково-методичної конференції 11-13 вересня 2002 р. – Запоріжжя. НАН України, Міністерство науки і освіти України, Запорізький державний університет, 2002. – С. 66-67.
15. Журавка А.В., Московкин В.М., Брук В.В. Двумерная модель конкурентных взаимодействий в экономике: теория и численные эксперименты // Автоматические системы управления и приборы автоматизации. – Х., 2001. – № 115. – С. 98-103.
16. Журавка А.В., Московкин В.М., Брук В.В. Двумерная модель кооперационных взаимодействий в экономике // Радиоэлектроника и информатика. – Х., 2002. – № 1. – С. 138-140.
17. Журавка А.В., Московкин В.М., Шепелев А.Г., Пантеенко Л.В. Наукометрический анализ эколого-экономических публикаций по конкурентно-кооперационной проблематике, представленных в базе данных МАГАТЭ «INIS» // Проблемы науки. – К., 2002. – № 4. – С. 33-36.
18. Московкин В.М., Журавка А.В. Математическое моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий в общественных науках // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2001. – № 3-4. – С. 46-51.
19. Московкин В.М., Журавка А.В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий (Контекст уравнений популяционной динамики в социально-экономических системах) // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 5-6. – С. 27-34.
20. Московкин В.М., Журавка А.В. Периодические решения в динамической системе третьего порядка, описывающей конкуренцию между социальными группами // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2002. – № 3-4. – С. 57-66.
21. Московкин В.М., Журавка А.В. Концептуальные проблемы социально-экономической динамики // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2003. – № 1-2. – С. 4-7.
22. Московкин В.М., Журавка А.В., Брук В.В. Самоорганизация в бизнес системах в рамках закона конкурентного распределения // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 9-10. – С. 52-54.
23. Lu Z., Takeuchi Y. Qualitative Stability and Global Stability for Lotka-Volterra Systems // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1994. – V. 182. – № 1. – P. 260-268.

**Журавка А.В.**

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры

**Мудаширу Тайо Мусибо**

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

## **МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ НА РЫНКЕ ТРУДА РАБОЧЕЙ СИЛЫ И СВОБОДНЫХ РАБОЧИХ МЕСТ**

### **Аннотация**

Одной из главных составляющей занятости, формирующей спрос на рабочую силу, является система занятости и динамика рабочих мест. Занятость является следствием наличия рабочих мест и стимулов, определяющих масштабы и соотношение спроса и предложения рабочей силы. Структура занятости в экономике в целом повторяет структуру рабочих мест. Но для достижения полной занятости необходимо сбалансированность между рабочей силой и наличием свободных рабочих мест. В статье построена модель взаимодействия рабочей силы и свободных рабочих мест на рынке труда. Проведен детальный качественный анализ этой модели, исследованы бифуркационные особенности, приводящие к опасным (неустойчивым) режимам функционирования рынка труда. Найден условия существования устойчивого состояния динамики безработного населения и свободных рабочих мест. Таким образом, разработан инструментарий, позволяющий прогнозировать равновесные уровни безработного населения и свободных рабочих мест.

**Ключевые слова:** рынок труда, динамика занятого населения, динамика свободных рабочих мест, устойчивый узел, бифуркации типа «седло-узел».

**Zhuravka A.V.**

Kharkiv National University of Construction and Architecture

**Mudashiru Tajo Musibau**

Kharkiv National Radiotechnic University

## **MODEL OF NONLINEAR DYNAMICS IN SOLVING MACROECONOMIC INSTABILITY PROBLEMS IN THE LABOR MARKET OF THE LABOR FORCE AND VACANCIES**

### **Summary**

A major component of employment that shape the demand for labor is a system of employment and the dynamics of jobs. Employment is the result of the availability of jobs and incentives that determine the scope and supply and demand of labor. The structure of employment in the economy as a whole follows the structure of jobs. But to achieve full employment necessary balance between labor and the availability of jobs. In this article, the mathematical model of coherent dynamics of the labor force and vacancies in the labor market was built. The detailed qualitative analysis of this model was done. It is investigated bifurcation characteristics that lead to dangerous (not stable) modes of the labor market. The conditions of existence of steady state dynamics employed and available jobs were found. Thus, advanced tools to predict the equilibrium levels of the unemployed population and job vacancies were developed.

**Keywords:** labor market, dynamics of employed population, dynamics of vacancies, persistent node, bifurcation of «saddle-node».