УДК 517.5

ОДНОЧАСНЕ НАБЛИЖЕННЯ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ $\bar{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ПРОСТОРАХ $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}$

Сілін Є.С.
Донбаський державний педагогічний університет

Стаття присвячена дослідженню питань одночасного наближення локально інтегровних на дійсній осі функцій та їх узагальнених інтегралів за допомогою операторів Валле Пуссена. Знайдено оцінки зверху функціоналів, які характеризують дану задачу. Оператори Валле Пуссена належать до множини $\varepsilon\sigma$ цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$. Розглянуто випадки, коли класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ визначаються повільно спадними і швидко спадними до нуля функціями ψ_1 і ψ_2.

Ключові слова: одночасне наближення, локально інтегровні функції, ряди Фур'є, оператори Валле Пуссена, ψ-похідна, ψ-інтеграл.

Постановка проблеми. Природним апаратом наближення періодичних функцій є частинні суми Фур'є цих функцій. Але, як добре відомо, суми Фур'є не є рівномірно збіжними на всьому просторі неперервних функцій. Цей факт спонукав розробці різноманітних тригонометричних сум, породжених лінійними методами підсумовування рядів Фур'є і позбавлених вказаного недоліку (суми Рогозинського, Стєклова, Фавара, Зигмунда, Фейєра, Рісса, Чезаро, Бернштейна-Рогозинського тощо).

У 80-90-х роках минулого сторіччя О. І. Степанець запропонував новий підхід до класифікації періодичних функцій, що базувався на поняттях (ψ,β)-похідної, в результаті чого було введено нові класи функцій. Така класифікація дала змогу не тільки охоплювати весь спектр сумовних функцій, а й враховувати більш тонкі властивості конкретних функцій.

Розвиваючи цей напрямок досліджень, О. І. Степанець запровадив класи $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ функцій, які локально сумовні на дійсній осі, та не є обов'язково періодичними. Нові класи функцій містять класи періодичних функцій як частинний випадок. Нарешті, з кінця минулого століття О. І. Степанець та його послідовники досліджують класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ функцій, локально сумовних на дійсній осі, які є узагальненням запроваджених у 1996 році множин $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ ψ-інтегралів 2π-періодичних функцій.

Актуальним є одержання для функцій з нових класів $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ результатів, які вже відомі для класів періодичних функцій $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$.

Основні поняття та означення. О. І. Степанець означив класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ наступним чином [1].

Позначимо через $\hat{L}_p$ множину функцій f, які визначені на дійсній осі й мають скінченну норму

$$\| f \|_{\hat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} | f(t) |\, dt, \;\; p \in [1,\infty),$$

$$\| f \|_{\hat{\infty}} \stackrel{df}{=} \operatorname{esssup}_{t\in\mathbb{R}} | f(t) |.$$

Нехай $\mathfrak{A}$ – це множина неперервних при $v \geq 0$ функцій $< \psi(v)$, які задовольняють умови:

1) $\psi(v) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає на $[0,1)$;

2) $\psi(v)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v) = 0$;

3) похідна $\psi'(v) = \psi'(v + 0)$ має обмежену варіацію на $[0,\infty)$.

Підмножину функцій $\psi(v)$ для яких

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(v)}{v}\, dv < \infty$$

позначимо відповідно через $\mathfrak{A}'$. Якщо ж функції $\psi(v)$ задовольняють лише умову 2) то множину таких функцій позначають як $\mathfrak{M}$.

Елементи, що складають множину $\mathfrak{A}$ можуть прямувати до нуля із різною швидкістю. Тому виділимо з $\mathfrak{A}$ наступні підмножини. Кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ $\forall v \geq 1$ співставимо пару функцій $\eta(\psi, v) = \psi^{-1}(\psi(v) / 2))$ та $\mu(\psi, v) = \frac{v}{\eta(v)-v}$, $v \geq 1$.

Тоді:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi, v) \leq K_1\},$$

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_2 \leq \mu(\psi, v) \leq K_3 < \infty\},$$

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{A},\;\; \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}',\;\; \mathfrak{A}_C = \mathfrak{M}_C \bigcap \mathfrak{A},$$

$$\bar{F} = \{\psi \in \mathfrak{A} : \eta'(v) \leq K_4\},$$

$$\bar{F}_c = \{\psi \in \bar{F} : \lim_{\sigma\to\infty}(\eta(\sigma) - \sigma) = c, 0 < c \leq \infty\},$$

де K_i, $i = 1,...,4$ – деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$.

Зрозуміло, що $\mathfrak{A}_C \subset \bar{F}_c \subset \bar{F}$.

Для кожної пари функцій $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{A}$ визначимо функцію $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} \stackrel{df}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-},$$

де ψ_{1+} та ψ_{2-} – парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно.

Нарешті, через $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ будемо позначати множину функцій $f \in \hat{L}_p$, які майже для всіх x можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x) = A + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + t)\hat{\bar{\psi}}(t)\, dt \stackrel{df}{=} A + \varphi * \hat{\bar{\psi}}(x), \qquad (1)$$

де A – стала, $\int\limits_R = \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{a}$, $\varphi \in \hat{L}_p$, $\hat{\bar{\psi}}(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)e^{-ixt}\, dx$.

За умов $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$ перетворення $\hat{\bar{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі [2-3].

Функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) називають $\bar{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Функцію $f(\cdot)$, відповідно, називають $\bar{\psi}$-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і позначають $I^{\bar{\psi}}(\varphi, \cdot)$.

Агрегатом наближення функцій з $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ є так звані оператори Валле Пуссена $V_{\sigma,c}(f;x)$ – ана-

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

логи відомих сум Валле Пуссена [4]. Оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\le \sigma$.

Отже, кожній функції з класів $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ співставимо відповідний оператор Валле Пуссена: $V_{\sigma,c}(f;x) = A + f^{\bar{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\bar{\psi}}(x)$, де $f \in \hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$, а $\widehat{\lambda_{\sigma,c}\bar{\psi}}(x)$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,c}(t)\bar{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le c, \\ \dfrac{\sigma - |t|}{\sigma - c}, & c \le |t| \le \sigma, \\ 0, & \sigma \le |t|, \quad \sigma > c \ge 1. \end{cases}$$

Наведемо також наступні означення [5]. Нехай $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}, \ldots, \bar{\psi}^{(m)}\}$, де $\bar{\psi}^{(i)} = (\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)})$, $i = \overline{1,m}$ – довільні пари функцій, такі, що $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}'_0$. або $\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)} \in \bar{F}$. Далі, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ – це довільний вектор із дійсними координатами і

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\bar{\psi};b) = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{|\bar{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\left(I^{\bar{\psi}^{(i)}}(\varphi;x) - V_{\sigma,h}(I^{\bar{\psi}^{(i)}}(\varphi;x))\right), \quad \varphi \in \hat{L}_p. \tag{2}$$

Задача одночасного наближення сумовних функцій та їх $\bar{\psi}$-інтегралів операторами Валле Пуссена полягає в дослідженні величини (2).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У випадку класів 2π-періодичних неперервних функцій задача про одночасне наближення функцій та їх (ψ,β)-похідних сумами Фур'є розглядалася в [5]. У роботах [6] і [7] вивчалося одночасне наближення періодичних неперервних функцій та їх $\bar{\psi}$-інтегралів сумами Фур'є й Валле Пуссена в неперервній та інтегральній метриках. Для випадку класів неперіодичних функцій задача одночасного наближення операторами Фур'є (аналогами сум Фур'є), тобто, у випадку $\psi_1(\sigma) = \psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma) = \psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta \in R$, $h = 1$ та

$$\lambda_{\sigma,1}^{*}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \sigma - 1, \\ 1 - \dfrac{(t - \sigma + 1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma - 1 \le t \le \sigma, \\ 0, & t \ge \sigma \end{cases}$$

була розв'язана в [8]. Задача одночасного наближення неперіодичних неперервних функцій та їх $\bar{\psi}$-інтегралів операторами Валле Пуссена в неперервній метриці досліджувалася у роботах [9-10].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. У даній статті розглядається питання одночасного наближення локально інтегровних функцій та їх $\bar{\psi}$-інтегралів операторами Валле Пуссена в інтегральній метриці на класах функцій, що визначаються узагальненою $\bar{\psi}$-похідною.

Постановка завдання. Метою роботи є знаходження оцінок зверху для величин $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\bar{\psi};b)$ на класах локально інтегровних функцій $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$. Об'єктом дослідження є класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$. Предметом дослідження є апроксимативні характеристики операторів Валле Пуссена на згаданих класах.

Задачі дослідження:

1. На класах $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ у випадку, коли вони містять функції малої гладкості, отримати оцінки зверху для величин $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\bar{\psi};b)$.

2. На класах $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ у випадку, коли вони складаються з функцій скінченної гладкості, нескінченно диференційовних, аналітичних та, в тому числі, цілих функцій, отримати оцінки зверху для величин $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\bar{\psi};b)$.

Виклад основного матеріалу дослідження. Введемо у розгляд такі множини:

$$W_\sigma^2 = \left\{\varphi \in \varepsilon_\sigma : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi^2(t)|}{(1+|t|)^2}dt < \infty\right\},$$

$$E_\sigma(f) = \inf_{g \in W_\sigma^2} \| f(x) - g(x) \|_{\hat{p}}.$$

Надалі вважатимемо, що $c = \sigma - h$ і $\Theta = \lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{h}{\sigma}$.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}'_0$, $i = \overline{1,m}$, *числа* σ *і* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \ge 1$ *обрані так, що* $\Theta \in [0,1)$, *стала* $a \in (0, \pi\sigma/h)$. *Тоді* $\forall f \in \hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$, $p \in [1,\infty)$ *і довільного вектора* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *з дійсними координатами при* $\sigma \to \infty$ *має місце нерівність*

$$\|\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\bar{\psi};b)\|_{\hat{p}} \le$$

$$\le E_{\sigma-h}(I^{\bar{\psi}}(\varphi))\left(\frac{4}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{|\bar{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t}dt\right|\right) + O(1),$$

де $R_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i \cos\gamma_\sigma^{(i)}$, $B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i \sin\gamma_\sigma^{(i)}$, $\gamma_\sigma^{(i)} = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}}{\psi_1^{(i)}}$; $O(1)$ – величина, яка рівномірно обмежена щодо σ та h в метриці простору $\hat{L}_p$.

Теорема 2. *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \bar{F}_c$, $\psi_2(i) \in \bar{F}_c$, $c \in [1,\infty]$, $i = 1,m$, *числа* $h = h(\sigma)$ *обираються так, що* $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_k^{(i)};\sigma);\sigma]$, $i = 1,2$, *та існують сталі* $K_1^{(i)}$, $K_2^{(i)}$, *такі, що виконана умова*

$$0 < K_1^{(i)} \le \frac{\eta(\psi_1^{(i)},\sigma) - \sigma}{\eta(\psi_2^{(i)},\sigma) - \sigma} \le K_2^{(i)} < \infty, \sigma \ge 1, i = \overline{1,m},$$

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ – *довільний вектор із дійсними координатами. Тоді* $\forall f \in \hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ *при* $\sigma \to \infty$ *має місце нерівність*

$$\|\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\bar{\psi};b)\|_{\hat{p}} \le E_{\sigma-h}(I^{\bar{\psi}}(\varphi))\frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{m_1-1}R_k \ln\frac{a_{k+1}(\sigma)}{a_k(\sigma)} - \right.$$

$$\left. - R_{m_1}\ln a_{m_1}(\sigma) + Q_{m_1+1}\ln a_{m_1+1}(\sigma) + \sum_{k=m+} Q_{k+1}\ln\frac{(\ )}{(\ )}\right) + O(1),$$

де $R_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $Q_k = \sqrt{(A_k - A_{m_1})^2 + (B_k - B_{m_1})^2}$;

$A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i \cos\gamma_\sigma^{(i)}$, $B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i \sin\gamma_\sigma^{(i)}$; $\gamma_\sigma^{(i)} = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}}{\psi_1^{(i)}}$;

величина $a_k(\sigma)$ – *це будь-яка з функцій* $(\eta(\psi_1^{(k)},\sigma) - \sigma)^{-1}$ *чи* $(\eta(\psi_2^{(k)},\sigma) - \sigma)^{-1}$, $k = \overline{1,m}$; *величини* $a_k(\sigma)$ *впорядковані за зростанням, причому, при* $k = \overline{1,m_1}$ $a_k(\sigma) < \pi/h$, *а при* $k = \overline{m_1+1,m}$ $a_k(\sigma) > \pi/h$, $O(1)$ – величина, яка рівномірно обмежена щодо σ та h в метриці простору $\hat{L}_p$.

Нехай $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, тоді, згідно до оцінки (5.3.4) [7, с. 214]

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{|\bar{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{|\psi_2^{(i)}(t)|}{t}dt\right| = O(1).$$

Якщо $\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1,\mathrm{m}}$, то

$$0 < K_1^{(i)} \le \frac{\sigma}{\eta(\psi_1^{(i)}, \sigma) - \sigma} \le K_2^{(i)} < \infty, \sigma \ge 1,$$

$$0 < K_3^{(i)} \le \frac{\sigma}{\eta(\psi_2^{(i)}, \sigma) - \sigma} \le K_4^{(i)} < \infty, \sigma \ge 1 \quad \text{і}$$

$$\sum_{k=1}^{m_1-1} R_k \ln \frac{a_{k+1}(\sigma)}{a_k(\sigma)} - R_{m_1} \ln a_{m_1}(\sigma) + Q_{m_1+1} \ln a_{m_1+1}(\sigma) +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m-1} Q_{k+1} \ln \frac{a_{k+1}(\sigma)}{a_k(\sigma)} = R_m \ln \frac{\sigma}{h} + O(1).$$

Таким чином, з теорем 1, 2 одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $\psi_1^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_C$, $\psi_2^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1,m}$, $\sigma > h \ge 1$. *Тоді* $\forall f \in \hat{L}^{\bar{\psi}} \hat{L}_p$, $p \in [1,\infty)$ *і довільного вектора* $b = (b_1, b_2, \dots, bm)$ *з дійсними координатами при* $\sigma \to \infty$ *має місце нерівність*

$$\| \Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi; x; \bar{\psi}; b) \|_{\hat{p}} \le E_{\sigma-h}(I^{\bar{\psi}}(\varphi)) \frac{4}{\pi^2} R_m \ln \frac{\sigma}{h} + O(1).$$

Дослідимо можливість виконання рівності $R_m = 0$. Для цього скористаємося міркуваннями з [6, с. 261-264].

Нехай $\psi_1^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_C$, $\psi_2^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1,m}$, $\sigma > h \ge 1$. Якщо

1. $m = 2$ і $b^* = (b_1, -b_1)$,

$$\frac{\psi_2^{(1)}(\sigma)}{\psi_1^{(1)}(\sigma)} = \frac{\psi_2^{(2)}(\sigma)}{\psi_1^{(2)}(\sigma)} + k\pi, \quad k \in Z;$$

2. $m \ge 3$ і $b^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_m^*)$ – довільний вектор, координати якого задовольняють умову $\sum_{i=1}^{m} b_i^* = 0$, якщо $\gamma_\sigma^{(i)} = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,m}$, або умову $b_j^* = \frac{\sum_{i \ne j,l} b_i^* \sin((\gamma_\sigma^{(i)}) - \gamma_\sigma^{(l)})}{\sin(\gamma_\sigma^{(i)} - \gamma_\sigma^{(j)})}$, $b_l^* = \frac{\sum_{i \ne j,l} b_i^* \sin((\gamma_\sigma^{(i)}) - \gamma_\sigma^{(j)})}{\sin(\gamma_\sigma^{(i)} - \gamma_\sigma^{(l)})}$ в іншому випадку, то при $\sigma \to \infty$. $R_m = O(1)$.

Звідси випливає

Наслідок 2. Нехай $\psi_1^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_C$, $\psi_2^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1,m}$, $\sigma > h \ge 1$, та виконана умова 1 чи умова 2.

Тоді $\forall f \in \hat{L}^{\bar{\psi}} \hat{L}_p$, $p \in [1,\infty)$ *і довільного вектора* $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ *з дійсними координатами при* $\sigma \to \infty$ *має місце нерівність*

$$\| \Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi; x; \bar{\psi}; b) \|_{\hat{p}} \le O(1).$$

Висновки з даного дослідження і перспективи подальшого розвитку в цьому напрямку. Доведені теореми показують, що оператори Валле Пуссена у випадку одночасного наближення функцій з класів $\hat{L}^{\bar{\psi}} \hat{L}_{\hat{p}}$ та їх $\bar{\psi}$-інтегралів забезпечують даній локально інтегровній (і не обв'язково періодичний) функції наближення, що має порядок найкращого наближення цілими функціями експоненціального типу з множини $W_{\sigma-h}^2$.

Список літератури:

1. Stepanets A. I., Wang Kunyang, Zhang Xirong. Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. – 1999. – № 11. – С. 1549-1561.
2. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – № 1. – С. 102-112.
3. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Укр. мат. журн. – 1990. – № 2. – С. 210-222.
4. Рукасов В. И. Приближение операторами Валле-Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – 44, № 5. – С. 682-691.
5. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
6. Соколенко І. В. Одночасне наближення ψ-інтегралів періодичних функцій сумами Фур'є // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – Т. 46. – С. 249-264.
7. Рукасов В. И., Чайченко С. О. Приближение ψ-интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. – Київ, 2003. – С. 156-191. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 36).
8. Степанец А. И., Дрозд В. В. Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. – Киев, 1989. – 59 с. – (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17).
9. Силин Е. С. Одновременное приближение функций и их ψ-интегралов в равномерной метрике // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. – Київ, 2004. – С. 337-348. – (Збірник праць Ін-ту математики НАН України; Т. 1, № 1).
10. Сілін Є. С. Одночасна апроксимація локально інтегровних функцій та їх ψ-інтегралів. Випадок малої гладкості / Євгеній Сергійович Сілін // Вісник Одеського Національного університету. Математика і механіка. – 2014. – Т. 19, вип. 2(22). – С. 27-36.

Силин Е. С.
Донбасский государственный педагогический университет

ОДНОВРЕМЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ $\overline{\psi}$-ИНТЕГРАЛОВ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ПРОСТРАНСТВАХ $\hat{L}^{\overline{\psi}}\hat{L}_p$

Аннотация
Статья посвящена исследованию вопросов одновременного приближения локально суммируемых на действительной оси функций и их обобщенных интегралов с помощью операторов Валле Пуссена. Найдено оценку сверху функционалов, которые характеризуют данную задачу. Оператори Валле Пуссена принадлежат множеству $\varepsilon\sigma$ целых функций экспоненциального типа $\leq\sigma$. Рассмотрены случаи, когда классы $\hat{L}^{\overline{\psi}}\hat{L}_p$ определяются медленно убывающими и быстро убывающими к нулю функциями ψ_1 и ψ_2.
Ключевые слова: одновременное приближение, ряды Фурье, локально интегрируемые функции, операторы Валле Пуссена, ψ-производная, ψ-интеграл.

Silin E.S.
Donbass State Teacher's Training University

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF SUMMABLE FUNCTION AND THEIR $\overline{\psi}$-INTEGRALS BY VALLE POUSSIN'S OPERATORS IN SPACES $\hat{L}^{\overline{\psi}}\hat{L}_p$

Summary
The article presents the problems of simultaneous approximation of locally integrable functions on the real axis and their generalized integrals using operators Vallee Poussin. The asymptotic laws of behavior of the upper bounds of functionals are found that characterize this problem. Тнe Valle-Poussin's operators belong to the set of entire functions of exponential type $\leq \sigma$. The cases have been considered in thesis when the classes $\hat{L}^{\overline{\psi}}\hat{L}_p$ are defined by slowly going downward and quickly going downword to zero functions ψ_1 and ψ_2.
Keywords: simultaneous approximation, locally integrable functions, Fourier series, Valle Poussin's operators, ψ-derivatives, ψ-integrals.