УДК 528.33:551.24

ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ЇЇ ПОХІДНИМИ, ПОДАНИМИ КОМБІНАЦІЯМИ МНОГОЧЛЕНІВ ЛЕЖАНДРА ТРЬОХ ЗМІННИХ

Фис М.М., Бридун А.М., Юрків М.І., Согор А.Р.
Національний університет «Львівська політехніка»

Подано алгоритм відновлення функції за її похідними, що є можливим при виконанні конкретних умов. Методика обчислень передбачає знаходження інтегральних характеристик від многочленів Лежандра трьох змінних для різних значень аргументів, за якими подаються співвідношення для похідних. Прикінцеві формули приведені в двох варіантах: аналітичне зображення шуканих виразів через узагальнені формули Родріга та явне їх представлення у вигляді скінчених сум. У першому випадку такі співвідношення доцільніше застосовувати для аналітичних перетворень у теоретичних дослідженнях. Практична ж числова реалізація алгоритму можлива при представленні шуканої функції скінченими сумами від трьох аргументів. Простота такої програмної реалізації підтверджується наведеним прикладом, наглядно ілюструє дієвість поданої методики та дозволяє обчислювати значення шуканих величин для довільного порядку апроксимації.
Ключові слова: розподіл мас планети, тривимірна модель густини, формула Коші, коефіцієнти розкладу, многочлени Лежандра.

Постановка проблеми. За даними спостережень необхідно апроксимувати кусково-неперервну функцію, для чого доцільно застосувати її подання у вигляді ортогональних рядів. Оскільки для випадку багатьох змінних не існує загального алгоритму побудови ортогональних систем для певних областей, то постає питання створення інших інструментів для вирішення цієї проблеми. Одним з таких підходів може бути узагальнення теорії побудови біортогональних многочленів для еліпсоїда.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останні роки поряд з класичними ортогональними функціями все більше уваги приділяється побудові біортогональних систем та їх застосуванні в математичних та прикладних дослідженнях [1; 2]. Можна виділити основні підходи до даної проблеми: вивчення спектральних властивостей певної системи [3], розв'язування диференціальних рівнянь [2] та наближення функцій на основі біортогональних розкладів, що спонукає побудову нових ортогональних (біортогональних) систем. Але, на відміну від добре вивчених ортогональних, створення біортогональних систем пов'язане з рядом складноців. Насамперед, не існує загального підходу до побудови таких функцій [1; 4]. Тому, в кожному з конкретних випадків, шляхом певних узагальнень необхідно "вгадати" твірні функції, на основі яких в подальшому будувати та вивчати властивості створених систем. Не вдаючись до спектральної сторони використання біортогональних систем та можливості їх використання для розв'язування задач математичної фізики, наголосимо на їхній апроксимаційний аспект. Для функції однієї змінної існує ряд ортогональних систем, що дають наближення до поданої функції і визначають характер збіжності. За аналогією з ортогональними рядами, біортогональні системи дозволяють подавати певні класи функцій через їх розклади. Задача значно ускладнюється при наближенні функцій багатьох змінних, так як не існує широкого класу ортогональних многочленів для її апроксимації. Винятком є хіба що. сукупність сферичних функцій, ортогональних в середині кулі в просторовому випадку, або система еліпсоїдальних функцій Ламе [5] для еліпсоїда $\tau : \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} < 1 \right\}$. Проте досліджувана функція повинна бути гармонічною, що в свою чергу значно звужує клас апроксимаційних об'єктів, наприклад, вони не можуть бути кусково-неперервними функціями. В зв'язку з цим в роботах [6; 7] запропоноване узагальнення двох біортогональних систем в кулі на випадок еліпсоїда та приведені основні їх властивості, які наведено нижче.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. В статті приводиться узагальнення методики побудови апарату апроксимації кусково-неперервної функції в еліпсоїді та вивчається додаткові можливості його застосування з метою практичного використання при представленні функції розподілу мас надр планети.

Мета статті. Продовження вивчення створених систем та встановлення таких властивостей, що дозволяють наближувати не тільки самі функції, але й їхні похідні та деякі їх інтегральні характеристики.

Виклад основного матеріалу. В прикладних задачах досить часто виникає завдання встановлення функції за її похідними, тобто, за відомими функціями P, Q, R, необхідно зі співвідношення $du = Pdx_1 + Qdx_2 + Rdx_3$ знайти функцію u (потенціал). Існування аналітичного виразу функції можливе при виконанні умови (функція є потенціалом):

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2}. \tag{1}$$

Зокрема, в алгоритмах наближеної побудови функцій розподілу мас планети ρ остання може бути представлена [8]:

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 + \int_0^{x_2} Q(0, x_2, x_3)\, dx_2 + \int_0^{x_3} R(0, 0, x_3)\, dx_3, \tag{2}$$

де функції P, Q, R (похідні ρ) мають наступний вигляд [9]:

$$P = \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \sum_{N=m+n+k=0}^{N_1} a_{mnk}^1 W_{mnk}(x_1, x_2, x_3),\; Q = \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \sum_{m+n+k=0}^{N} a_{mnk}^2 W_{mnk}(x_1, x_2, x_3),\; R = \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = \sum_{m+n+k=0}^{N} a_{mnk}^3 W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \tag{3}$$

тут $W_{mnk}(x_1,x_2,x_3)$ – многочлени Лежандра трьох змінних, m,n,k – цілі додатні числа, N_1 – порядок апроксимації [8], $a^i_{mnk} = \int_\tau \frac{\rho\omega_{nmk}}{l_{mnk}} d\tau$ – коефіцієнти розкладу функції похідних $\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$, $i = 1,2,3$.

Характер структури співвідношень (2) та (3) визначає необхідність встановлення алгоритмів для обчислень коефіцієнтів

$$\int_0^{x_1} W_{mnk}(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 \quad (I), \qquad \int_0^{x_2} W_{mnk}(0,x_2,x_3)\,dx_2 \quad (II), \qquad \int_0^{x_3} W_{mnk}(0,0,x_3)\,dx_3 \quad (III),$$

що спонукає до подальших досліджень в даному напрямку.

Визначення та деякі властивості біортогональних систем в еліпсоїді. В роботі [6] по аналогії з [10] розглянуто дві твірні функції:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,\alpha,\beta,\gamma) = \left(\left(\frac{\alpha x_1}{a_1^2} + \frac{\beta x_2}{a_2^2} + \frac{\gamma x_3}{a_3^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{a_2^2} + \frac{\gamma^2}{a_3^2}\right)\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

та

$$\psi(x_1,x_2,x_3,\alpha,\beta,\gamma) = \left(1 - \frac{2\alpha x_1}{a_1^2} - \frac{2\beta x_2}{a_2^2} - \frac{2\gamma x_3}{a_3^2} + \left(\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{a_2^2} + \frac{\gamma^2}{a_3^2}\right)\right)^{-\frac{3}{2}},$$

коефіцієнти розкладу яких за змінними α, β, γ дають дві системи функцій $\{\omega_{mnk}\}$, $\{W_{mnk}\}$. Основна властивість цих двох систем – їх ортогональність однієї до другої, тобто ці системи є біортогональними

$$l_{mnk} = \int_\tau W_{mnk}\omega_{m_1n_1k_1} d\tau = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq m_1, \text{ або } n \neq n_1, \text{ або } k \neq k_1, \\ \dfrac{3V_e(2N+3)N!}{m!\,n!\,k!\,a_1^{2m}a_2^{2n}a_3^{2k}}, & \text{якщо } \ m = m_1,\ \ n = n_1,\ \ k = k_1, \end{cases} \tag{4}$$

тут V_e – об'єм еліпсоїда τ.

Це дозволяє подавати довільну функцію ρ наступними рядами:

$$\rho \sim \sum_{m+n+k=0}^{\infty} c_{mnk}\omega_{nmk}, \qquad \rho \sim \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk}W_{nmk}, \tag{5}$$

де коефіцієнти розкладу визначаються так:

$$b_{nmk} \sim \int_\tau \frac{\rho\omega_{nmk}}{l_{mnk}} d\tau, \qquad c_{nmk} \sim \int_\tau \frac{\rho W_{nmk}}{l_{mnk}} d\tau. \tag{6}$$

Якщо функція є кусково-неперервною, то для розкладу за цими системами має місце нерівність Бесселя та рівність Парсеваля.

$$\sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk}c_{mnk}l_{mnk} \leq \int_\tau \rho^2 d\tau, \qquad \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk}c_{mnk}l_{mnk} = \int_\tau \rho^2 d\tau.$$

Ці дві властивості забезпечують збіжність в середньому рядів (5), тобто,

$$\lim_{N\to\infty} \int_\tau \left(\rho - \sum_{m+n+k=0}^{N} c_{mnk}\omega_{nmk}\right)^2 d\tau = 0 \ \text{ або } \ \lim_{N\to\infty} \int_\tau \left(\rho - \sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk}W_{nmk}\right)^2 d\tau = 0.$$

Обчислення членів сум (5) можна здійснювати, наприклад з допомогою рекурентних співвідношень [7], або з допомогою аналогів формул Родріга, або через аналітичний запис у вигляді сум.

Формули Родріга та явні зображення для многочленів W_{mnk}. Многочлени W_{mnk} [11] як коефіцієнти розкладу твірної функції φ визначають за формулою Коші

$$W_{mnk}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(2\pi i)^3 m!\,n!\,k!} \int_{C_1}\int_{C_2}\int_{C_3} \frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,x_1,x_2,x_3)}{\alpha^{m+1}\beta^{n+1}\gamma^{k+1}} d\alpha d\beta d\gamma, \tag{7}$$

де C_1, C_2, C_3 – кола з центром в точці $(0,0,0)$ у площинах x_2Ox_3, x_1Ox_3 та x_1Ox_2 відповідно, $N = m+n+k$.

Для перетворення (7) зробимо заміну змінних:

$$\alpha = \frac{2(\xi - x_1)}{l^2}, \quad \beta = \frac{2(\eta - x_2)}{l^2}, \quad \gamma = \frac{2(\varsigma - x_3)}{l^2}, \ \text{ де } \ l^2 = \frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{a_2^2} + \frac{\varsigma^2}{a_3^2} - 1. \tag{8}$$

Тоді контури c_1', c_2', c_3' переносяться в аналогічні c_1, c_2, c_3 з центрами в точках $(x_1,0,0)$, $(0,x_2,0)$, $(0,0,x_3)$.

Якобіан перетворення заміни (8) є наступним:

$$\frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(\xi,\eta,\varsigma)} = -\frac{8}{l^4}\left(\frac{2\xi x_1}{a_1^2} + \frac{2\eta x_2}{a_2^2} + \frac{2\varsigma x_3}{a_3^2} - 1\right)\left(\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{a_2^2} + \frac{\varsigma^2}{a_3^2}\right),$$

твірна функція після перетворень в нових позначеннях:

$$\varphi(\xi,\eta,\varsigma,x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{l}\left(\frac{2\xi x_1}{a_1^2} + \frac{2\eta x_2}{a_2^2} + \frac{2\varsigma x_3}{a_3^2} - \frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{a_2^2} - \frac{\varsigma^2}{a_3^2} + 1\right)^{-1}.$$

Тоді, відповідно, інтеграл (7):

$$W_{mnk}(x_1,x_2,x_3) = \frac{(2\pi i)^{-3}}{2^N(m!\,n!\,k!} \int_{C_1}\int_{C_2}\int_{C_3} \frac{\left(\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{a_2^2} + \frac{\zeta^2}{a_3^2} - 1\right)^N}{(\xi - x_1)^{m+1}(\eta - x_2)^{n+1}(\zeta - x_3)^{k+1}} d\xi d\eta d\zeta, \tag{9}$$

що згідно з формулою Коші дає формулу Родріга, а саме:

$$W_{mnk}\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{2^{-N}}{m!\,n!\,k!}\frac{\partial^N}{\partial x_1^m\partial x_2^n\partial x_3^k}\left(\frac{x_1^{\ 2}}{a_1^{\ 2}}+\frac{x_2^{\ 2}}{a_2^{\ 2}}+\frac{x_3^{\ 2}}{a_3^{\ 2}}-1\right)^N. \tag{10}$$

Отже, вираз (I):

$$\int_0^{x_1}W_{mnk}\left(x_1,x_2,x_3\right)dx_1=\frac{2^{-N}}{m!\,n!\,k!}\frac{\partial^N}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2^n\partial x_3^k}\left(\frac{x_1^{\ 2}}{a_1^{\ 2}}+\frac{x_2^{\ 2}}{a_2^{\ 2}}+\frac{x_3^{\ 2}}{a_3^{\ 2}}-1\right)^{N-1}. \tag{11}$$

Для отримання формул для W_{mnk} в співвідношенні (10) зробимо заміну $\xi-x_1=\xi_1$, $\eta-x_2=\eta_1$, $\varsigma-x_3=\varsigma_1$, в результаті чого одержимо:

$$W_{mnk}=\frac{1}{2^N m!\,n!\,k!}\int_{c_1}\int_{c_2}\int_{c_3}\frac{\left(\frac{\left(\xi_1+x_1\right)^2}{a_1^{\ 2}}+\frac{\left(\eta_1+x_2\right)^2}{a_2^{\ 2}}+\frac{\left(\varsigma_1+x_3\right)^2}{a_3^{\ 2}}\right)^N}{\xi_1^{\ m+1}\eta_1^{\ n+1}\varsigma_1^{\ k+1}}d\xi_1 d\eta_1 d\varsigma_1. \tag{12}$$

Розкладемо підінтегральний вираз (12), використовуючи декілька разів біном Ньютона, отримаємо:

$$W_{mnk}=\frac{N!}{2^N m!\,n!\,k!}\sum_{l=0}^{N}\frac{(-1)^l 2^l}{l!}\sum_{t_1+t_2+t_3=l}\frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{a_1^{2t_1}a_2^{2t_2}a_3^{2t_3}}\sum_{l_1=0}^{2t_1}\sum_{l_2=0}^{2t_2}\sum_{l_3=0}^{2t_3}x_1^{\ 2t_1-l_1}x_2^{\ 2t_2-l_2}x_3^{\ 2t_3-l_3}$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{c_1}\int_{c_2}\int_{c_3}\frac{\xi_1^{\ l_1-n-1}\eta_1^{\ l_2-m-1}\varsigma_1^{\ l_3-k-1}}{l_1!(2t_1-l_1)!\,l_2!(2t_2-l_2)!\,l_3!(2t_3-l_3)!}d\xi_1 d\eta_1 d\varsigma_1. \tag{13}$$

Континуальні інтеграли ненульові для $l_1=m$, $l_2=n$, $l_3=k$, а тому на основі цього одержуємо формулу

$$W_{mnk}\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{N!\,a_1^{-m}a_2^{-n}a_3^{-k}}{2^N m!\,n!\,k!}\sum_{l=0}^{N}\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sum_{t_1+t_2+t_3=N-l}\frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{2t_1-m}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{2t_2-n}\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{2t_3-k}. \tag{14}$$

інтегрування якого визначає перший вираз (I)

$$\int_0^{x_1}W_{mnk}\left(x_1,x_2,x_3\right)dx_1=\frac{N!\,a_1^{-m}a_2^{-n}a_3^{-k}}{2^N m!\,n!\,k!}\sum_{l=0}^{N}\frac{(-1)^l}{2^l l!},$$
$$\sum_{t_1+t_2+t_3=N-l}\frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m+1)(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{2t_1-m+1}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{2t_2-n}\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{2t_3-k}. \tag{15}$$

Якщо $x_1=0$, то формула (12) набуде вигляду

$$W_{mnk}\left(0,x_2,x_3\right)=\frac{1}{(2\pi i)^3 2^N m!\,n!\,k!}\int_{C_1}\int_{C_2}\int_{C_3}\frac{\left(\frac{\xi^2}{a_1^{\ 2}}+\frac{\eta^2}{a_2^{\ 2}}+\frac{\zeta^2}{a_3^{\ 2}}-1\right)^N}{\xi^{m+1}(\eta-x_2)^{n+1}(\zeta-x_3)^{k+1}}d\xi d\eta d\zeta$$

або

$$W_{mnk}\left(0,x_2,x_3\right)=\frac{1}{(2\pi i)^3 2^N m!\,n!\,k!}\int_{C_1}\int_{C_2}\int_{C_3}\sum_{l=0}^{N}C_N^l\frac{\xi^{\,2l-m-1}}{a_1^{2l}}\frac{\left(\frac{\eta^2}{a_2^{\ 2}}+\frac{\zeta^2}{a_3^{\ 2}}-1\right)^{N-l}}{(\eta-x_2)^{n+1}(\zeta-x_3)^{k+1}}d\xi d\eta d\zeta.$$

Звідси, коли $2l=m$ отримаємо, що

$$W_{mnk}\left(0,x_2,x_3\right)=\frac{N!\frac{\partial^{n+k}}{\partial x_2^n\partial x_3^k}\left(\frac{x_2^{\ 2}}{a_2^{\ 2}}+\frac{x_3^{\ 2}}{a_3^{\ 2}}-1\right)^{N-\frac{m}{2}}}{2^{N-n-k}m!\left(N-\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!} \tag{16}$$

або, в розгорнутій формі,

$$W_{mnk}\left(0,x_2,x_3\right)=\frac{N!\,a_1^{-m}a_2^{-n}a_3^{-k}}{2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{m}{2}\right)!\,m!\,n!\,k!}\sum_{l=0}^{N}\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sum_{t_2+t_3=N-l-\frac{m}{2}}\frac{(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_2-n)!(2t_3-k)!}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{2t_2-n}\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{2t_3-k}.$$

Тому, враховуючи (8), для співвідношення (II) маємо

$$\int_0^{x_2}W_{mnk}\left(0,x_2,x_3\right)dx_2=\frac{N!\frac{\partial^{n+k-1}}{\partial x_2^{n-1}\partial x_3^k}\left(\frac{x_2^{\ 2}}{a_2^{\ 2}}+\frac{x_3^{\ 2}}{a_3^{\ 2}}-1\right)^{N-\frac{m}{2}}}{2^{N-n-k}m!\left(N-\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}, \tag{17}$$

або

$$\int_0^{x_2}W_{mnk}\left(0,x_2,x_3\right)dx_2=\frac{N!\,a_1^{-m}a_2^{-n}a_3^{-k}}{2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{m}{2}\right)!\,m!\,n!\,k!}\sum_{l=0}^{N}\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sum_{t_2+t_3=N-l-\frac{m}{2}}\frac{(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_2-n+1)(2t_2-n)!(2t_3-k)!}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{2t_2-n+1}\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{2t_3-k}. \tag{18}$$

Аналогічно, виведемо формулу для $W_{mnk}\left(0,0,x_3\right)$

$$W_{mnk}\left(0,0,x_3\right)=\frac{1}{(2\pi i)^3 2^N m!\,n!\,k!}\int_{C_1}\int_{C_2}\int_{C_3}\frac{\left(\frac{\xi^2}{a_1^{\ 2}}+\frac{\eta^2}{a_2^{\ 2}}+\frac{\zeta^2}{a_3^{\ 2}}-1\right)^N}{\xi^{m+1}\eta^{n+1}(\zeta-x_3)^{k+1}}d\xi d\eta d\zeta=$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^3 2^N m!\,n!\,k!}\int_{C_1}\int_{C_2}\int_{C_3}\sum_{l=0}^{N}\sum_{t=0}^{l}C_N^l C_l^t\xi^{2t-m-1}\eta^{2l-2t-1}\left(\frac{\zeta^2}{a_3^{\ 2}}-1\right)^{N-l}d\xi d\eta d\zeta.$$

Покладемо $2t = m$, $2l - m - n = 0$, $2l - 2t - n = 0$, тоді $t = \frac{m}{2}$, $l = \frac{m+n}{2}$.

Отже,

$$W_{mnk}\left(0,0,x_3\right) = \frac{1}{(2\pi i)2^N m!\,n!\,k!} C_N^{\frac{m+n}{2}} \int_{C_3} \frac{\left(\frac{\zeta^2}{a_3^2} - 1\right)^{N-\frac{m+n}{2}}}{(\zeta - x_3)^{k+1}} d\zeta .$$

Таким чином, многочлен $W_{mnk}\left(0,0,x_3\right)$ набуде вигляду

$$W_{mnk}\left(0,0,x_3\right) = \frac{N!}{2^N m!\,n!\,k!\left(N - \frac{m-n}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \frac{\partial^k}{\partial x_3^k}\left(\frac{x_3^2}{a_3^2} - 1\right)^{N-\frac{m-n}{2}},$$

або

$$W_{mnk}\left(0,0,x_3\right) = \frac{N!\,a_1^{-m} a_2^{-n} a_3^{-k+1}}{2^N k!\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \sum_{l=0}^{N-\frac{m+n}{2}} \frac{(-1)^{N-\frac{m+n}{2}} 2^l}{\left(N - \frac{m+n}{2} - l\right)!} \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{2l-k}.$$

Тоді

$$\int_0^{x_3} W_{mnk}\left(0,0,x_3\right) dx_3 = \frac{N!}{2^N m!\,n!\,k!\left(N - \frac{m-n}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_3^{k-1}}\left(\frac{x_3^2}{a_3^2} - 1\right)^{N-\frac{m-n}{2}}. \tag{19}$$

А отже,

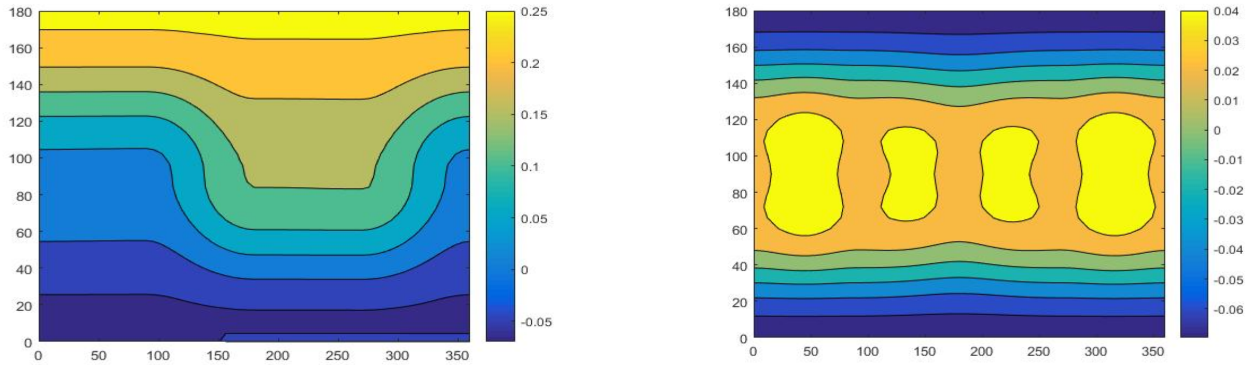
$$\int_0^{x_3} W_{mnk}\left(0,0,x_3\right) dx_3 = \frac{N!\,a_1^{-m} a_2^{-n} a_3^{-k}}{2^N k!\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \sum_{l=0}^{N-\frac{m+n}{2}} \frac{(-1)^{N-\frac{m+n}{2}} 2^l}{\left(N - \frac{m+n}{2} - l\right)!(2l-k+1)} \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{2l-k+1}. \tag{20}$$

Слід також зауважити, що деякі з виразів (8) – (20) рівні нулю, а саме $W_{m(2s+1)k}\left(0,x_2,x_3\right) = 0$ та $W_{(2s+1)nk}\left(0,0,x_3\right) = W_{m(2r+1)k}\left(0,0,x_3\right) = 0$, коли m або n непарні.

Застосуємо наведену методику до побудови тривимірної моделі густини розподілу мас Землі. За параметрами гравітаційного поля з урахуванням одновимірної моделі густини PREM [12], визначаємо коефіцієнти розкладу похідних a_{mnk}^{i} до третього степеня включно [13]. Сукупність формул (1), (3), (7), (10), (12) дозволяє будувати тривимірну модель розподілу мас надр планети. Зокрема, для Землі приведений графік функції, що відображає зміну густини на глибині 5150 км по широті та довготі ([13], Рис. 1).

Побудована таким чином тривимірна модель густини, як видно з рис. 1, дає суттєве уточнення зі збільшенням порядку апроксимації з двох (рис. 1a) до чотирьох (рис. 1b). Спостерігається, насамперед, перерозподіл маси всередині планети, зокрема, переміщення мас в сторону поверхні, що спричиняється обертовим рухом планети. Зазначимо, що такий перерозподіл має місце по всьому радіусу Землі. Отже, на основі однієї і тієї ж інформації, одержуємо модель густини, яка дає більш детальну картину розподілу мас всередині планети.

Висновки. В статті наведено алгоритм відновлення функції розподілу мас планети за її похідними при виконанні певних умов. Отримані співвідношення для похідних у двох варіантах: аналітичне зображення через узагальнені формули Родріга та явне представлення у вигляді скінчених сум. Формули (5), (9), (11) можуть бути корисними при теоретичних дослідженнях з використанням біортогональних рядів всередині еліпсоїда. Для отримання числових значень апроксимуючих функцій більш зручним є застосування співвідношень (7), (10), (12), що підтверджується наведеним прикладом. Їх застосування дає можливість інтерпретувати глобальні аномалії гравітаційного поля та вивчати глибинні геодинамічні процеси всередині Землі.



а) б)

Рис. 1. Карта аномалій густини надр Землі на глибині 5150 км

Список літератури:

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / Дзядык В.К. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Сухорольський М.А. Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат / М.А. Сухорольський, В.В. Достойна // Математичні методи та фізико-механічні поля – 2012. – Т. 55. – № 2. – С. 52-62.
3. П'янило Я. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я. П'янило, В. Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів. – № 19. – 2016. – С. 146-156.
4. П'янило Я. Ортогональні многочлени в задачах апроксимації функцій двох змінних / Я.Д. П'янило, Г.М. П'янило, М.Є. Васюник, І.Р. Васюник // Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті. – Львів, 2015. – С. 83-87.
5. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Е.В. Гобсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 476 с.
6. Мещеряков Г.А. О биортогональных системах внутри эллипсоида / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. – Москва, 1981. – С. 120.
7. Мещеряков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля / Г.А. Мещеряков. – М.: Наука, 1991. – 216 с. – (Гл. ред. Физ.-мат. лит.).
8. Фис М.М. Метод знаходження густини розподілу мас планети з урахуванням стоксових сталих до четвертого степеня / М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор, В.О. Волос // «Геодинаміка». – Львів, 2008. № 1(7). – С. 25-34.
9. Черняга П.Г. Новий підхід до використання стоксових сталих для побудови функцій та її похідних розподілів мас планет / П.Г. Черняга, М.М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів, 2012. Вип. ІІ(24). – С. 40-43.
10. Бейтмен Г. Высшие трансцедентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. М.: Наука, 1974. – Т. ІІ. – 294 с.
11. Свешников А.Г. Теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1974. – 319 с.
12. Dzewonski A. Preliminary reference Earth model / A. Dzewonski, D. Anderson // Physics of the Earth and Planet Inter. – 1981. – № 25. – P. 297-356.
13. Fys M. One option of constructing three-dimensional distribution of the mass and its derivatives for a spherical planet earth / M. Fys, M. Yurkiv, A. Brydun, V. Lozynskyi // Geodynamics. – Lviv, 2016. – № 2(21). – P. 36-44.

Фыс М.М., Брыдун А.М., Юркив М.И., Согор А.Р.
Национальный университет «Львовская политехника»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ПРОИЗВОДНЫМ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация
Представлен алгоритм восстановления функции по ее производным. Методика вычислений предполагает нахождение интегральных характеристик от многочленов Лежандра трех переменных для различных значений аргументов, по которым подаются соотношение для производных. Заключительные формулы приведены в двух вариантах: аналитическое изображение искомых выражений через обобщенные формулы Родрига и явное их представления в виде конечных сумм. В первом случае такие соотношения целесообразнее применять для аналитических преобразований в теоретических исследованиях. Практическая же числовая реализация алгоритма возможна при представлении искомой функции конечными суммами от трех аргументов. Простота такой программной реализации подтверждается приведенным примером и позволяет вычислять значения искомых величин для произвольного порядка аппроксимации.
Ключевые слова: распределение масс планеты, трехмерная модель плотности, формула Коши, коэффициенты разложения, многочлены Лежандра.

Fys M.M., Brydun A.M., Yurkiv M.I., Sohor A.R.
Lviv Polytechnic National University

ON DEFINITION OF A FUNCTION BY ITS DERIVATIVES, REPRESENTED BY COMBINATIONS OF LEGENDRE POLYNOMIALS OF THREE VARIABLES

Summary
Algorithm for restoring a function by its derivatives is presented. The calculation technique assumes finding of integral characteristics of the Legendre polynomials of three variables for different values of the arguments, over which the relation for the derivatives is given. The final formulas are given in two versions: analytical representation of the sought expressions in terms of generalized Rodrigues formulas and their explicit representation in the form of finite sums. In the first case, such relations are more appropriate for analytical transformations in theoretical studies. Practical numerical implementation of the algorithm is possible when representing the desired function by finite sums of three arguments. The simplicity of program implementation is confirmed by the example and makes it possible to calculate the values of the unknown quantities for an arbitrary order of approximation.
Keywords: distribution of planetary masses, three-dimensional density model, Cauchy formula, decomposition coefficients, Legendre polynomials.