ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 517.544

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРОСТОРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО СИСТЕМОЮ КРУГОВИХ ТРІЩИН

Шумихін С.А., Швандт М.А.
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

В роботі розглянута просторова задача обчислення концентрації пружних напруг навколо кругових тріщин, розташованих в одній площині. Отримана наближена формула обрахунку коефіцієнта інтенсивності напруг навколо цих тріщин. Задача формулюється у вигляді інтегро-диференціального рівняння. Для його розв'язку застосований метод ортогональних многочленів та метод малого параметру. Розглянута залежність коефіцієнта інтенсивності напруг від відстані між тріщинами та радіуса тріщин.
Ключові слова: напруга, коефіцієнт інтенсивності напруг, тріщина, інтенсивність, ортогональні многочлени, многочлени Якобі.

Постановка проблеми. В сучасному світі разом із розвитком технологій в житті людей все частіше виникає необхідність побудови важких з інженерної точки зору конструкцій. Конструкції можуть мати різне призначення – будівництво житловий споруд та інших будівель, машинобудування, будівництво дорожні інфраструктури (мости, естакади тощо) та інших споруд. Ускладнення цих конструкції призводить до нових і більш високих вимог щодо міцності та витривалості конструкцій, надійності їх роботи та економічності у їх побудові. Все це, в свою чергу, призводить до необхідності розглядати більш складні задачі теорії пружності, зокрема задачі концентрації напруг коло дефектів таких типів як тріщини.

В даній роботі розглянуто спосіб побудови наближеного розв'язку задачі для простору за наявності в ньому системи кругових тріщин, розташованих в одній площині. У цій задачі цікавість представляє так званий коефіцієнт інтенсивності напруг, який показує напругу у кругових тріщинах, що виникають внаслідок прикладеного розривного навантаження і при цьому враховує розмір тріщин та їх розташування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі такого типу свого часу розглядали В.В. Панасюк [1, с. 21] та Г.Я. Попов [2, с. 320].

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. У більшості робіт розглядалися ситуації періодичної або іншим чином організованої системи тріщин. Або наводився розв'язок, що спирався на суттєве використання наближених методів. У нашій статті отримано точний розв'язок у вигляді розкладів у ряди по ортогональних многочленах, що дає можливість більш ефективно і точно дослідити характер поведінки коефіцієнта інтенсивності напруг навколо тріщин.

Мета статті. Отримати формули для обчислення коефіцієнту інтенсивності напруг навколо тріщин. Розглянути залежність коефіцієнта інтенсивності напруг від розміру тріщин та від відстані між тріщинами.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо необмежений пружний простір з модулем пружності E та коефіцієнтом Пуассона μ, послаблений системою кругових тріщин

$$\Omega_i : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \le a_i^2 \left(i = \overline{1, N}\right),$$

що лежать у площині $z = 0$. Вважаємо, що до берегів тріщин прикладені нормальні розривні напруги $p_i(x, y)$. Потрібно знайти розподіл напруг коло тріщин.

Зауважимо, що навколо контуру тріщини нормальні розтяжні напруги σ та вертикальні зміщення u її берегів обчислюються за формулами

$$\sigma(S_1) = \frac{N}{\sqrt{S_1}} + G(l) + \bar{o}\left(S_1^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$u(S_2) = \pm \frac{4(1-\mu^2)}{E} N\sqrt{S_2} + \bar{o}\left(S_2^{\frac{3}{2}}\right).$$

Тут S_1 та S_2 – малі відстані від точки l на контурі тріщини до деякої точки, що лежить на площині тріщини, відповідно ззовні та всередині області, що займає тріщина, $G(l)$ – сили поміж часткового зчеплення [1, с. 21]; N – так званий коефіцієнт інтенсивності напруг. Він залежить від характеру діючих навантажень, конфігурації тіла та форми тріщини. Знання коефіцієнта інтенсивності є ключовим моментом для з'ясування можливого зруйнування тріщини. Основною метою є отримання формул для його обчислення.

На основі диференціальних рівнянь рівноваги та закону Гука було отримано наступну зовнішню задачу Неймана для рівняння Лапласа:

$$\Delta f = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial z} = -\frac{2(1-\mu^2)}{E} p(x, y), (x, y) \in \Omega_i$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Причому, функція $f(x,y,z)$ зазнає розриву при переході крізь $z=0$:

$$f|_{z=-0} - f|_{z=+0} = § (x,y);$$

тут $X(x,y)$ – функція розкриття тріщин:

$$X(x,y) = \begin{cases} §_i (x,y), (x,y) \in \Omega_i; \\ 0, (x,y) \notin \bigcup_1^N \Omega_i; \end{cases}$$

і вона повинна перетворюватися на нуль на нескінченності разом із своїми першими похідними.

Після застосування до задачі узагальненого метода інтегральних перетворень, запропонованим Г.Я. Поповим [2, с. 421], по змінній z, а потім за змінною x та за змінною y та використання формул диференціювання для функцій Бесселя задача зводиться до наступного інтегро-диференціального рівняння відносно невідомої функції розкриття тріщин $X(x,y)$:

$$\Delta_1 \iint_{\bigcup_1^N \Omega_i} X(\xi,\eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = C p_i(x,y), \qquad (1)$$

де

$$C = \frac{8\pi(1-\mu^2)}{E} \text{ та } \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Перепишемо рівняння (1) у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно X_i:

$$\Delta_1 \iint_{\Omega_i} X_i(\xi,\eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \Delta_1 \sum_{\substack{j \\ (j\neq i)}}^{q} \iint_{\Omega_i} X_j(\xi,\eta) \frac{d\xi d\eta}{R} = C p_i(x,y), \quad (2)$$

Тут $i = 1,\ldots,n$.

Введемо локальну систему полярних координат:

$$x - x_i = r\cos\phi \quad \xi - x_i = \rho\cos\psi \quad \xi - x_j = \rho\cos\psi$$

$$y - y_i = r\sin\phi \quad \eta - y_i = \rho\sin\psi \quad \eta - y_j = \rho\sin\psi.$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(tR)\,dt$$

із системи (2) отримаємо наступне:

$$\Delta_\phi \int_0^{a_i} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} X_i(\rho,\psi)\, d\psi \int_0^{+\infty} J_0(tR)\,dt +$$

$$+\varepsilon_{ij}\Delta_\phi \sum_{\substack{j \\ (j\neq i)}}^{q} \int_0^{a_j} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} X_j(\rho,\psi) \frac{d\psi}{K_{ij}} = C p_i(r,\phi), \qquad (3)$$

де:

$$R^2(r,\phi,\rho,\psi) = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\phi-\psi)$$

$$K_{ij}^2(r,\phi,\rho,\psi,\varepsilon_{ij}) =$$

$$= \varepsilon_{ij}^2 R^2 + 2\varepsilon_{ij} a_i \left(\cos\theta_{ij}(r\cos\phi - \rho\cos\psi) + \sin\theta_{ij}(r\sin\phi - \rho\, sin\psi)\right) + a_i^2$$

$$h_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \varepsilon_{ij} = \frac{a_i}{h_{ij}}$$

$$\cos\theta_{ij} = \frac{(x_i - x_j)}{h_{ij}}, \sin\theta_{ij} = \frac{(y_i - y_j)}{h_{ij}}$$

$$\Delta_\phi = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, i \neq j, |\phi| \le \pi$$

Коефіцієнт інтенсивності напруг для i-ї тріщини $N_i(\phi)$ визначається наступним чином [1, с. 20]:

$$N_i(\phi) = \lim_{r\to a_i+0} \sigma_z(r,\phi,0)\sqrt{r-a_i}, i = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Для розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно функції розкриття тріщин (3) будемо використовувати метод ортогональних многочленів [2, с. 321]. Представимо відомі функції $p_i(r,\phi)$ та шукані $X_i(r,\phi)$ у вигляді наступних рядів Фур'є:

$$p_i(r,\phi) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(p_k^{i+}(r)\cos k\phi + p_k^{i-}(r)\sin k\phi\right)$$

$$X_i(r,\phi) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(X_k^{i+}(r)\cos k\phi + X_k^{i-}(r)\sin k\phi\right).$$

Підставимо ці розкладання у (3) та використаємо формулу для функції Бесселя $J_0(tR)$, яка при $\nu = 0$ має вигляд:

$$J_0(tR) = J_0(tR)J_0(t\rho) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} J_k(t\rho)J_k(tr)\cos k\phi$$

Маємо:

$$D_n \int_0^{a_i} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (X_k^{i+}(\rho)\cos k\psi +$$

$$+X_k^{i-}(\rho)\sin k\psi)d\psi \int_0^{+\infty} 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_n(tr)J_n(t\rho)\cos(n(\phi-\psi))\,dt +$$

$$+\varepsilon_{ij}\Delta_\phi \sum_{\substack{j \\ (j\neq i)}}^{q} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{a_j} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} \left(X_k^{j+}(\rho)\cos k\psi + X_k^{j-}(\rho)\sin k\psi\right) \frac{d\psi}{K_{ij}} =$$

$$= C\sum_{k=0}^{+\infty}\left(p_k^{i+}(r)\cos k\phi + p_k^{i-}(r)\sin k\phi\right).$$

Проведемо тригонометричну ортогоналізацію по ϕ на проміжку від $-\neq$ до $\neq$.

$$D_n \int_0^{a_i} §_n^{i\pm}(\rho) W_n(r,\rho)\rho d\rho + \varepsilon_1^3 f_n^{j\pm}(r) = \frac{C}{2\pi} p_n^{i\pm}(r),$$

де:

$$D_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}, 0 \le r \le a_i, n = 0,1,2,\ldots,$$

$$W_n(r,\rho) = \int_0^{+\infty} J_n(tr)J_n(t\rho)\,dt, i,j = 1,2; i \neq j,$$

$$f_n^{j\pm}(r) = (2\pi^2)^{-1} \sum_{\substack{j \\ (j\neq i)}}^{q} \sum_{l=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} d\phi \int_0^{a_j}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos l\psi}{\sin l\psi} §_l^{j\pm}(\rho) \frac{\rho}{K_{ij}^3} d\rho d\psi$$

$$p_n^{i+}(r) = (1+\delta_{n,0})\, p_n^{i\pm}(r), p_n^{i-}(r) = p_n^i(r)$$

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}.$$

Для розв'язання останньої системи застосуємо метод ортогональних многочленів, заснований на наступному спектральному співвідношенні для многочленів Якобі $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ [2, с. 322]:

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

$$D_k\int_0^a \frac{P_n^{k,\frac{1}{2}}\left(1-2\rho^2a^{-2}\right)W_k\left(r,\rho\right)\rho}{\left(1-\rho^2a^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-k}}d\rho=-\frac{a^{-1}}{\lambda_n^k}P_n^{k,\frac{1}{2}}\left(1-2\frac{r^2}{a^2}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^k,$$

де

$$\lambda_n^k=\frac{n!(n+k)!}{2\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)},k=0,1,2\ldots$$

Розв'язок системи (6) будемо розшукувати у вигляді:

$$X_k^{i\pm}\left(r\right)=\left(a_i^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_i}\right)^k\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m^k\frac{\gamma_k}{\gamma_m}\lambda_m^kP_m^{k,\frac{1}{2}}\left(1-2\frac{r^2}{a^2}\right)X_{km}^{i\pm},(5)$$

де

$$\left(\alpha_m^k\right)^2=\frac{(m+k)!\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m+k+\frac{3}{2}\right)*\left(2m+k+\frac{3}{2}\right)},\gamma_k=\begin{cases}1,k=0\\ \sqrt[3]{k},k=1,2,\ldots\end{cases}$$

Також будемо використовувати властивість ортогональності для многочленів Якобі [6, c. 39]:

$$\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\beta}t^{2\alpha+1}P_n^{\alpha,\beta}\left(1-2t^2\right)P_m^{\alpha,\beta}\left(1-2t^2\right)dx=\delta_{nm}\frac{G_n^{\alpha,\beta}}{2},$$

де

$$G_n^{\alpha,\beta}=\frac{\Gamma\left(\alpha+n+1\right)\Gamma\left(\beta+n+1\right)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma\left(\alpha+\beta+n+1\right)},\delta_{nn}=1;\delta_{nm}=0,n\neq m$$

Таким чином, приходимо до наступної нескінченної алгебраїчної системи:

$$X_{ks}^{i\pm}-\varepsilon_{ij}^3\frac{T_k^{j\pm}\gamma_s}{\alpha_s^k\gamma_kG_s^{k,\frac{1}{2}}}\sum_{\substack{j\\(j\neq i)}}^{q}\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}X_{lm}^{j\pm}\alpha_m^l\frac{\gamma_l}{\gamma_m}\lambda_m^lL_{kslm}^{\pm}=$$

$$=-\frac{\gamma_s}{\alpha_s^k\gamma_kG_s^{k,\frac{1}{2}}}\frac{C}{2\pi}p_{k,s}^{i\pm}, \qquad (6)$$

де:

$$k,s=0,1,2,\ldots;i,j=1,2;i\neq j$$

$$T_k^{j\pm}=\frac{a_j^3\pi^{-2}}{4}$$

$$L_{kslm}^{\pm}={}^{\pm}_{ks}\,{}^{\pm}_{lm}\left[K_{ij}^{-3}\left(a_i\sqrt{t},\phi,a_j\sqrt{\tau},\psi,\varepsilon_1\right)\right]$$

$${}^{\pm}_{ks}\left[f\left(t,\phi\right)\right]=\int_0^1\frac{P_s^{k,\frac{1}{2}}\left(1-2t\right)}{\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot t^{-\frac{k}{2}}}\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}\cos k\phi\\ \sin k\phi\end{matrix}f\left(t,\phi\right)dtd\phi$$

$$p_{k,s}^{i+}=\frac{\pi^{-1}}{\left(1+\delta_{n,0}\right)}{}^{\pm}_{ks}\left[p_i\left(a_i\sqrt{t},\phi\right)\right];$$

$$p_{k,s}^{i-}=\pi^{-1}{}^{\pm}_{ks}\left[p_i\left(a_i\sqrt{t},\phi\right)\right].$$

Для спрощення обчислень далі розглянемо випадок, існують дві тріщини, причому $y_1=y_2=0$ та $a_1\geq a_2$. Тут центр кругової тріщини 1 з радіусом a_1 – точка $A\left(x_1,0\right)$, центр кругової тріщини 2 з радіусом a_2 – точка $B\left(x_2,0\right)$. Надалі позначатимемо: $\varepsilon_{12}=\varepsilon_1$,

$$K^2\left(r,\phi,\rho,\psi,\varepsilon_1\right)=\varepsilon_1^2R^2+2\varepsilon_1a_1\cos\theta_{12}\left(r\cos\phi-\rho\cos\psi\right)+a_1^2,$$

$$i,j=1,2,i=\overline{1,m},j=\overline{1,n},m=n=1,$$

$$h_{12}=\left|x_1-x_2\right|.$$

Отримаємо формулу для коефіцієнта інтенсивності напруг $N_i\left(\phi\right)$ через розв'язок системи (6). Для цього розкладемо $N_i\left(\phi\right)$ та $\sigma_z\left(r,\phi,0\right)$ у наступні ряди:

$$N_i\left(\phi\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(N_k^{i+}\cos k\phi+N_k^{i-}\sin k\phi\right) \qquad (7)$$

$$\sigma_z\left(r,\phi,0\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sigma_k^{+}\left(r\right)\cos k\phi+\sigma_k^{-}\left(r\right)\sin k\phi\right)$$

Тоді із (4) маємо:

$$N_k^{i\pm}=\lim_{r\to a_i+0}\sqrt{r-a_i}\,\sigma_k^{\pm}\left(r\right)$$

Для з'ясування поведінки $\sigma_k^{\pm}\left(r\right)$ поблизу контуру тріщин будемо використовувати наступну асимптотичну рівність

$$A_k^{i\pm}=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s^k\frac{\gamma_k}{\gamma_s}\lambda_s^kP_s^{k,\frac{1}{2}}(-1)X_{ks}^{i\pm},(8)$$

що випливає із (5) при $r\to a_i-0$:

$$X_k^{i\pm}\left(r\right)=A_k^{i\pm}\left(\frac{r}{a_i}\right)^k\sqrt{a_i^2-r^2},$$

Виразимо $\sigma_k^{\pm}\left(r\right)$ через $X_k^{i\pm}\left(r\right)$, отримаємо:

$$\frac{C}{2\pi}\sigma_k^{\pm}\left(r\right)=A_k^{i\pm}D_k\int_0^{a_i}\left(\frac{\rho}{a_i}\right)^k\sqrt{a_i^2-\rho^2}W_k\left(r,\rho\right)\rho d\rho+\varepsilon_1^3f_k^{i\pm}\left(r\right).$$

Порачуємо інтеграл у правій частині та застосуємо оператор D_k, в результаті переходячи до границі при $r\to a_i+0$ отримаємо:

$$\sigma_k^{\pm}\left(r\right)=A_k^{i\pm}\frac{2\pi}{C}\frac{a_i}{\sqrt{r^2-a_i^2}},$$

$$N_k^{i\pm}=\sqrt{\frac{a_i}{2}}\frac{2\pi}{C}A_k^{i\pm}.$$

Таким чином, знаючи розв'язок системи (6), по формулах (7) та (8) ми можемо обчислити коефіцієнт інтенсивності напруг.

Розв'язок системи (6) будемо отримувати методом малого параметра, в якості якого візьмемо $\varepsilon_1=\frac{a_1}{h_{12}}$, тут a_1 – радіус найбільшої тріщини, h_{12} – відстань між центрами тріщин. Розкладемо шукані $X_{ks}^{i\pm}$ у ряди по степенях ε_1:

$$X_{ks}^{i\pm}=\sum_{n=0}^{+\infty}X_{ksn}^{i\pm}\varepsilon_1^n,\;p_{ks}^{i\pm}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{ksn}^{i\pm}\varepsilon_1^n \qquad (9)$$

Для розкладу в ряд коефіцієнтів системи (6) скористаємося формулою

$$\left(1-2x\alpha+\alpha^2\right)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n^{\lambda}\left(z\right)\alpha^n.$$

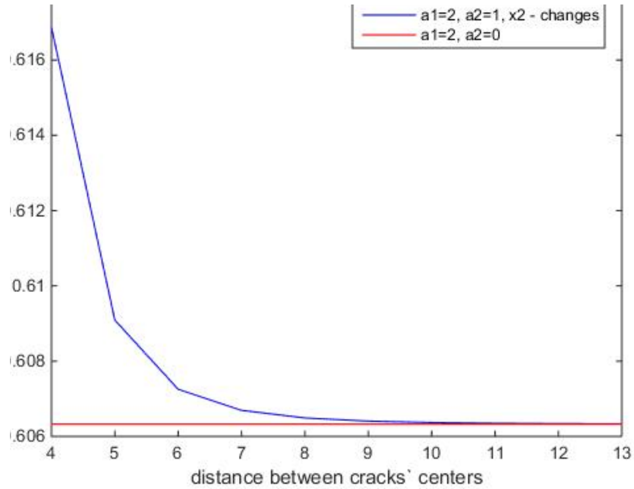

Рис. 1. Залежність коефіцієнту інтенсивності напруг від відстані між тріщинами

Джерело: розроблено авторами

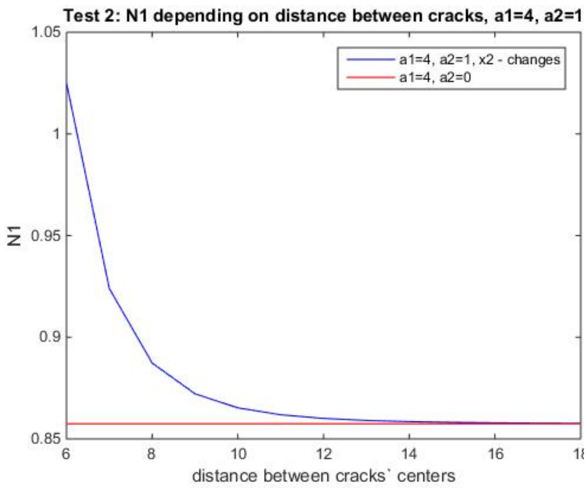

Рис. 2. Залежність коефіцієнту інтенсивності напруг від відстані між тріщинами

Джерело: розроблено авторами

Тут $C_n^{\lambda}(z)$ – многочлен Гегенбауера. Припустимо, що $\alpha = \varepsilon_1$, $z = (-1)^i R^{-1}(r\cos\phi - \rho\cos\psi)$ із цієї формули, після застосування інтегральних операторів ${}^{\pm}_{ks}$, ${}^{\pm}_{lm}$, визначених в (6), отримаємо наступний ряд по степенях ε_1:

$$L^{\pm}_{kslm} = \sum_{n=0}^{+\infty} L^{ks\pm}_{lmn}\varepsilon_1^n, L^{ks\pm}_{lmn} = a_1^{-1-n} \; {}^{\pm}_{ks} \; {}^{\pm}_{lm}\left[C^{\frac{3}{2}}_{n-2}(z)R^{n-2}\right] \quad (10)$$

Після підстановки розкладів (9) та (10) і прирівнюванні коефіцієнтів при однакових степенях ε_1, отримаємо наступні співвідношення для коефіцієнтів

$$X^{i\pm}_{ksn} = -\frac{\gamma_s}{\alpha_s^k \gamma_k G_s^{k,\frac{1}{2}}}\frac{C}{2\pi} p^{i\pm}_{ksn}, n = 0,1,2. \quad (11.1)$$

$$X^{i\pm}_{ksn} = \varepsilon_{ij}^3 \frac{T_k^{j\pm}\gamma_s}{\alpha_s^k \gamma_k G_s^{k,\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} X^{j\pm}_{lm}\alpha_m^l \frac{\gamma_l}{\gamma_m}\lambda_m^l L^{\pm}_{kslm} - \frac{\gamma_s}{\alpha_s^k \gamma_k G_s^{k,\frac{1}{2}}}\frac{C}{2\pi} p^{i\pm}_{ksn}, (11.2)$$

$$n = 3,4,\ldots; k,s = 0,1,2,\ldots$$

Розглянемо випадок розкриття тріщин під дією постійних навантажень $p_i(r,\phi) = Q_i$.

$$p^{i+}_{k,s} = \frac{\pi^{-1}}{(1+\delta_{n,0})} \; {}^{\pm}_{ks}[Q_i], p^{i-}_{k,s} = \pi^{-1} \; {}^{\pm}_{ks}[Q_i]$$

Тоді із першого співвідношення (11.1) маємо:

$$X^{i\pm}_{000} = -\frac{\gamma_0}{\alpha_0^k \gamma_0 G_0^{0,\frac{1}{2}}}\frac{C}{2\pi} p^{i\pm}_{00}, X^{i\pm}_{ks0} = 0, k^2 + s^2 > 0, X^{i\pm}_{ks1} = X^{i\pm}_{ks2} = 0, k,s \ge 0$$

Значення інших коефіцієнтів можна отримати із другого співвідношення (11.2). Залишаючи у методі редукції 7 рівнянь, можемо порахувати ці коефіцієнти. Таким чином, задачу буде розв'язано:

$$N_i(\phi) = \sum_{k=0}^{6}\left(N_k^{i+}\cos k\phi + N_k^{i-}\sin k\phi\right).$$

Графічна інтерпретація обрахунків коефіцієнту інтенсивності напруг, обчисленого за допомогою комп'ютера:

1) Тест 1 на віддалення центрів тріщин: радіус першої тріщина $a_1 = 2$, радіус другої $a_2 = 1$. За відсутності другої тріщини $N_1 = 0.606$.

2) Тест 2 на віддалення центрів тріщин: радіус першої тріщина $a_1 = 4$, радіус другої $a_2 = 1$. За відсутності другої тріщини $N_1 = 0.857$.

Висновки і пропозиції. Аналіз результатів, отриманих за допомогою комп'ютерних обрахунків, показує, що:

1) Коефіцієнт інтенсивності напруг для більшої тріщини збільшується при збільшенні її радіуса.

2) Відстань між центрами тріщин впливає на коефіцієнт. При збільшенні відстані між центрами тріщин відповідно коефіцієнт інтенсивності напруг зменшується. До того ж, він наближається до випадку, коли друга тріщина взагалі відсутня. Це видно на графіках тестів (рис. 1 та рис. 2).

Список літератури:

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – Киев: «Наукова думка», 1968. – С. 20-24.
2. Попов Г.Я. Избранные труды / Г.Я. Попов. – Одесса: Одесский Национальний Университет имени И.И. Мечникова, 2007. – С. 320-324, 421-431.
3. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции / П.Ф. Папкович // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. Выпуск 10, 1932. – С. 1425-1435.
4. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie / H. Neuber // Berlin, VDI-Verlag G.M.B.H., Berlin NW7, 1934. – Zeitschrift for angewandte Mathematik und Mechanik, Band 14 (14. Jahrgang) – С. 203-212.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – С. 702-706, 1057.

6. Шумихин С.А. Пространственные смешанные краевые задачи теории упругости со сменой граничных условий по окружности и эллипсу : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / С.А. Шумихин. – Одесса, 1982, С. 39, 96-121.

Шумихин С.А., Швандт М.А.
Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО СИСТЕМОЙ КРУГОВЫХ ТРЕЩИН

Аннотация
В работе рассмотрена пространственная задача расчета концентрации упругих напряжений в окрестности круговых трещин, расположенных в одной плоскости Получена приближенная формула расчета коэффициента интенсивности напряжений в окрестности этих трещин. Задача формулируется в виде интегро-дифференциального уравнения. Для его решения использован метод ортогональных многочленов и метод малого параметра. Рассмотрена зависимость коэффициента интенсивности напряжений от расстояния между трещинами и радиуса трещин.
Ключевые слова: напряжение, коэффициент интенсивности напряжений, трещина, интенсивность, ортогональные многочлены, многочлены Якоби.

Shumikhin S.A., Shvandt M.A.
Odessa I.I. Mechnikov National University

THE TENSE STATE OF SPACE, WEAKENED BY THE SYSTEM OF CIRCULAR CRACKS

Summary
In the work the spatial problem of elastic tenses concentration calculation around circular cracks placed in one plane was examined. An approximate formula for tense intensity coefficient calculation around these cracks was received. The problem is formulated as integro-differential equation. To solve it, orthogonal polynomials method and small parameter method were used. The dependence of tense intensity coefficient from distance between cracks and their radiuses was examined.
Keywords: tense, tense intensity coefficient, crack, intensity, orthogonal polynomials, Jacobi polynomials.