

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА, ОДИН КОНЕЦ КОТОРОГО ЗАКРЕПЛЕН ШАРНИРНО, А ДРУГОЙ ЖЕСТКО

Эфендиев О.Я.

Азербайджанский архитектурно-строительный университет

В статье рассматривается задача о потере устойчивости прямого стержня с прямоугольным поперечным сечением. Один конец стержня закреплен шарнирно, а другой жестко. Материал стержня пористый. Поэтому, связи между деформациями и напряжениями являются нелинейными. Учитывается так же геометрическая нелинейность в одном из поперечных направлений. Таким образом задача является и физически и геометрически нелинейной, следовательно её решение связано с большими математическими трудностями. Для устранения этих трудностей при решении задачи применен вариационный принцип. Эйлера уравнения предложенного функционала дают систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая решена с применением метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Графически построены зависимости критических значений сжимающей силы от начального прогиба относительной толщины.

Ключевые слова: Устойчивость, пористость, тонкостенность, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность, перемещение, деформация, напряжение.

Постановка задачи. Стержень постоянной толщины, из пористого материала, находится в вертикальном положении, причем верхняя опора свободна перемещается в вертикальном направлении и на него действует центрально-сжимающая сила P . Считается, что стержень тонкий. Температура и коэффициент Пуассона считаются постоянными. Требуется определить критическую силу, соответствующую потере устойчивости.

Решение задачи. Введем декартову систему координат xyz так, чтобы ось x была направлена по оси стержня и проходила через центр тяжести поперечного сечения, а оси y и z направим по главным осям инерции поперечного сечения.

Сделаем следующие предположения:

1) Геометрическая нелинейность имеет место только в направлении нормали (нормальную координату будем обозначать через $-z$).

2) Учитывается гипотеза Кирхгофа-Лява, т.е. сечения, перпендикулярные к оси стержня до деформирования, остаются перпендикулярными к оси стержня и после деформирования.

3) В направлении оси y точки стержня не получают перемещения и остальные величины не зависят от y .

4) В направлении оси y толщина стержня равна единице.

5) Начало системы координат находится на срединной поверхности не деформированного стержня, длина стержня равна $2l$, причем $-l \leq x \leq l$.

6) В направлении оси z толщина стержня равна $2h$, причем $-h \leq z \leq h$.

Тогда компоненты тензора деформаций срединной поверхности и её изгиба выражаются через компоненты вектора перемещения на срединной поверхности следующим образом [4]:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

где w -перемещения точек срединного слоя в направлении оси z , $\varepsilon(x,t)$, $w(x,t)$ – соответственно, деформация и изменение кривизны на срединной поверхности стержня, t -время.

Уравнение равновесия с учетом геометрической нелинейности, связь между компонентами

тензора деформаций и напряжений и граничные условия в декартовой системе координат имеют следующий вид [1; 3; 4]

$$\left[\sigma_{ij} (u_{\alpha,i} + \delta_{\alpha i}) \right]_{,j} = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - k_0) \left(\frac{1 + \nu}{E_{cek}} \sigma_{ij} - \frac{\nu I_1}{E_{cek}} \delta_{ij} \right) \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij} (\delta_{\alpha i} + u_{\alpha,i}) \cdot n_j = \bar{N}_\alpha & \text{на } S_\sigma \\ u_i = \bar{u}_i & \text{на } S_u \end{cases} \quad (4)$$

где

$$k_0 = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{I_1^2 + 2(1 + \nu)I_2} - 1} \quad (5)$$

σ_m – максимальное значение нормального напряжения, E_{cek} – секущий модуль упругости в момент разрыва, которые всегда можно определить из эксперимента на одноосное растяжение. ε_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензоров деформации и напряжения, δ_{ij} – символы Кронекера, I_1, I_2 – соответственно первый и второй инварианты тензора напряжений, запятые означает дифференцирование по координате с индексом, который следует после запятой, u_α – компоненты вектора перемещений, n_j – компоненты вектора нормали, \bar{N}_i – заданные компоненты вектора поверхностных сил на S_σ , \bar{u}_i – заданные перемещения на поверхности S_u , по повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до 3.

Систему (3) перепишем следующим образом [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1 - k_0}{E_{cek}} \right) \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \cdot I_1 \delta_{ij} \right] \quad (6)$$

Введем следующее обозначение:

$$\frac{1 - k_0}{E_{cek}} = K \quad (7)$$

С учетом (7) в (6) имеем:

$$\varepsilon_{ij} = K \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu I_1 g_{ij} \right] \quad (8)$$

Предлагаемый функционал имеет следующий вид [2]:

$$J = \int_V \left\{ \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{\alpha,j} \dot{u}_{\alpha,i} - \dot{\sigma}_{ij} \left[\dot{K} \left((1+\nu) \sigma_{ij} - \nu I_1 \delta_{ij} \right) + K \left((1+\nu) \dot{\sigma}_{ij} - \nu \dot{I}_1 \delta_{ij} \right) \right] \right\} dV - \int_{s_x} \dot{N}_i \dot{u}_i ds + \int_{s_x} (\dot{u}_i - \dot{u}_i) \dot{N}_i ds \quad (9)$$

где точка над величинами означает производную по времени. V – объем, s_x – площадь поперечного сечения стержня.

При линейном напряженном состоянии $\sigma_{11} = \sigma$ и остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Из системы (3) получается, что

$$\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{1-k_0}{E_{cek}} \right) \tilde{\sigma} \quad (10)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{11}$; $\tilde{\sigma} = \sigma_{11}$

$$k_0 = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{\tilde{\sigma}^2} - 1} \quad (11)$$

Из (9)

$$J = \int_V \left[\dot{\tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \dot{\tilde{\sigma}} \left(\dot{K} \tilde{\sigma} + K \dot{\tilde{\sigma}} \right) \right] dV - \int_{s_x} \dot{P} u ds \quad (12)$$

На основе известных соотношений, компонент тензора конечной деформации $\tilde{\varepsilon}$ в слое стержня, удаленном на расстоянии z от срединного слоя, имеет вид [3]:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + z\alpha \quad (13)$$

Компонент тензора напряжений в произвольной точке стержня имеет вид [3]:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2h} N(x,t) + \frac{3z}{2h^3} M(x,t) \quad (14)$$

где

$$N(x,t) = \int_{-h}^h \tilde{\sigma} dz; \quad M(x,t) = \int_{-h}^h z \tilde{\sigma} dz \quad (15)$$

Приравнивая первую вариацию (12) к нулю имеем:

$$\delta J = \int_V \left[\dot{\tilde{\sigma}} \delta \tilde{\varepsilon} + \dot{\tilde{\varepsilon}} \delta \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} \frac{\partial \dot{w}}{\partial E} \delta \frac{\partial w}{\partial E} - \left(\dot{K} \cdot \tilde{\sigma} + 2K \cdot \dot{\tilde{\sigma}} \right) \delta \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma} \delta \dot{K} \right] dV - \int_{s_x} \dot{p} \delta u ds = 0 \quad (16)$$

По условию один конец стержня закреплен шарнирно, а другой жестко, (рис. 1) т.е. граничные условия можем записать в виде

$$w(x,\tau) |_{x=0,2l} = 0; \quad M |_{x=2l} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} |_{x=0} = 0 \quad (17)$$

Равенство нулю момента при $x=2l$ означает, что $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$. Исходя из этого, граничных условий (17) и физических соображений, для прогиба $w(x,\tau)$ примем следующую аппроксимацию:

$$w(x,\tau) = \varphi(\tau) \cdot x^2 \left[\cos \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{4l^2} (x-2l)^2 \right]; \quad (18)$$

Для $u(x,\tau)$ выберем следующую аппроксимацию:

$$u(x,\tau) = \psi(\tau) x \quad (19)$$

где $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ неизвестные функции времени.

Как видно из (18), выполняется первое условие (17). Из (18)

$$\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x} = \varphi \left\{ 2x \left[\cos \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{4l^2} (x-2l)^2 \right] + x^2 \left[-\frac{\pi}{4l} \sin \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{4l^2} 2(x-2l) \right] \right\} \quad (20)$$

Из (20) выполняется третье условие (17). Из (20)

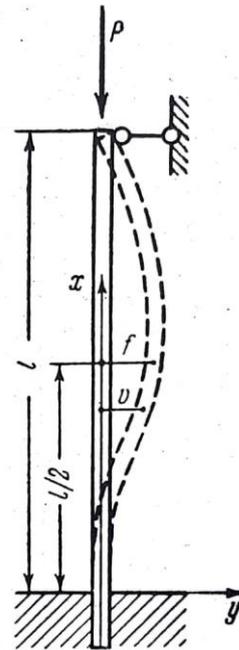


Рис. 1. Устойчивость стержня шарнирно закрепленного по торцам

$$\frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2} = \varphi(\tau) \left\{ 2 \left[\cos \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{4l^2} (x-2l)^2 \right] + 4x \left[-\frac{\pi}{4l} \sin \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{4l^2} 2(x-2l) \right] + x^2 \left[-\frac{\pi^2}{16l^2} \cos \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{2l^2} \right] \right\} \quad (21)$$

Из (21) $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ при $x=2l$. Это означает, что выполняется и второе условие (17).

Подставляя (18) и (19) в (1) получим:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \dot{\psi}(\tau) x + \dot{\varphi}(\tau) x^2 \cdot \left\{ 2 \left[\cos^2 \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{2l^2} \cos \frac{\pi x}{4l} (x-2l)^2 + \frac{\pi^2}{16l^4} (x-2l)^4 \right] + 2x \left[-\frac{\pi}{8l} \sin \frac{\pi x}{2l} + \frac{\pi}{2l^2} \cos \frac{\pi x}{4l} (x-2l) - \frac{\pi^2}{16l^2} \sin \frac{\pi x}{4l} (x-2l)^2 + \frac{\pi^2}{8l^2} (x-2l)^3 \right] + \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{\pi^2}{16l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{4l} - \frac{\pi^2}{4l^2} \sin \frac{\pi x}{4l} (x-2l) + \frac{\pi^2}{4l^4} (x-2l)^2 \right] \right\} \quad (22)$$

$$\dot{\varepsilon} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \dot{\varphi}(\tau) \left\{ 2 \left[\cos \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{4l^2} (x-2l)^2 \right] + 4x \left[-\frac{\pi}{4l} \sin \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{4l^2} 2(x-2l) \right] + x^2 \left[-\frac{\pi^2}{16l^2} \cos \frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{2l^2} \right] \right\} \quad (23)$$

Исходя из уравнения состояния (10) и физических соображений для $N(x,t)$ и $M(x,t)$ примем следующие аппроксимации:

$$N(x, t) = N_1(t) + N_2(t) \sin^2 \frac{\pi x}{2l}; \quad M(x, t) = M(t) \cos \frac{\pi x}{4l} \quad (24)$$

где $N_1(t)$, $N_2(t)$, $M(t)$ – неизвестные функции времени.

Упростим выражения для K_0 , K_1 , \dot{K}_0 , и \dot{K}_1 . Для этого разложим выражения этих величин в ряд Тейлора по N около точки $N_0 = 2h\sigma_0$, где σ_0 – предел выносливости и соответствует точке на диаграмме одноосного растяжения, начала криволинейной части диаграммы. Известно, что $\sigma_0 = \sqrt{2}\sigma_e$.

Тогда:

$$\sqrt{4h^2\sigma_m^2 - N_0^2} = 2h\sigma_0 = N_0 \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24) и оставляя только линейные члены получаем:

$$K_0(N_0) = 0; \quad K_0(N) \approx K_0(N_0) + \frac{\partial(K_0(N_0))}{\partial N} = \frac{3}{N_0 E_{cek}}(N - N_0) \quad (26) \quad (43)$$

$$K_1(N_0) = \frac{3M}{E_{cek} h^2 N_0}; \quad \frac{\partial(K_1(N_0))}{\partial N} = 0$$

Тогда

$$K_1 \approx \frac{3M}{E_{cek} h^2 N_0} \quad (27)$$

Из (26) и (27)

$$\dot{K}_0 = \frac{3}{N_0 E_{cek}} \dot{N}; \quad \dot{K}_1 = \frac{3\dot{M}}{E_{cek} h^2 N_0} \quad (28)$$

$$\delta \dot{K}_0 = \frac{3}{N_0 E_{cek}} \delta \dot{N}; \quad \delta \dot{K}_1 = \frac{3\delta \dot{M}}{E_{cek} h^2 N_0} \quad (29)$$

С учетом (26) и (27), (16) получает вид:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^{2l} [\dot{N} \delta \dot{\varepsilon} + \dot{M} \delta \dot{\varepsilon} + N \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \left(\dot{\varepsilon} - \frac{3}{2hN_0 E_{cek}} (4\dot{N}N - 2\dot{N}N_0 + \frac{3}{h^2} M\dot{M}) \right) \delta \dot{N} + \left(\dot{\varepsilon} - \frac{3}{h^3 N_0 E_{cek}} (3\dot{N}M + 4N\dot{M} - 3N_0\dot{M}) \right) \delta M] dx - 2h\dot{P} \cdot \delta \dot{u} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Введем обозначение

$$hN_0 E_{cek} = E \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30) имеем:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^{2l} [\dot{N} \delta \dot{\varepsilon} + \dot{M} \delta \dot{\varepsilon} + N \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \left(\dot{\varepsilon} - \frac{3}{2E} (4\dot{N}N - 2\dot{N}N_0 + \frac{3}{h^2} M\dot{M}) \right) \delta \dot{N} + \left(\dot{\varepsilon} - \frac{3}{h^2 E} (3\dot{N}M + 4N\dot{M} - 3N_0\dot{M}) \right) \delta M] dx - 2h\dot{P} \cdot \delta \dot{u} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Подставим выражения для $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}$, \dot{N} , \dot{M} в (32). Тогда из (24):

$$\dot{N} = \dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}; \quad \dot{M} = \dot{M} \cos \frac{\pi x}{4l} \quad (33)$$

Проведем некоторые упрощения в аппроксимациях. В равенстве (20) когда, $x \rightarrow 2l$, все чле-

ны, кроме третьей стремятся к нулю. Поэтому будем считать, что

$$\frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x} = -\frac{\pi}{4l} \varphi(\tau) x^2 \sin \frac{\pi x}{4l}$$

Откуда

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} = -\frac{\pi}{4l} \dot{\varphi} x^2 \sin \frac{\pi x}{4l}; \quad \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} = -\frac{\pi}{4l} x^2 \sin \frac{\pi x}{2l} \delta \dot{\varphi}; \quad (34)$$

Точно так же из (22)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\psi}(\tau) + \frac{\pi^2}{32l^2} \dot{\varphi}(\tau) x^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l}; \\ \delta \dot{\varepsilon} &= \delta \dot{\psi} + \frac{\pi^2}{32l^2} \cdot x^4 \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \delta \dot{\varphi}; \end{aligned} \quad (35)$$

Из (23):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \dot{\varphi}(\tau) \frac{\pi x}{l} \left(\frac{x}{2l} - \sin \frac{\pi x}{4l} \right); \\ \delta \dot{\varepsilon} &= \frac{\pi x}{l} \left(\frac{x}{2l} - \sin \frac{\pi x}{4l} \right) \delta \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (36)$$

Из (24), (33)

$$\delta \dot{N} = \delta \dot{N}_1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \delta \dot{N}_2; \quad \delta \dot{M} = \cos \frac{\pi x}{4l} \delta \dot{M}; \quad (37)$$

Подставим эти выражения в (32):

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^{2l} \{ (\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}) (\delta \dot{\psi} + \frac{\pi^2}{32l^2} \cdot x^4 \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \delta \dot{\varphi}) + \dot{M} \cos \frac{\pi x}{4l} \left(\frac{\pi x}{l} \left(\frac{x}{2l} - \sin \frac{\pi x}{4l} \right) \right) \delta \dot{\varphi} + (N_1 + N_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}) \left(\frac{\pi}{4l} \dot{\varphi} x^2 \sin \frac{\pi x}{4l} \right) \left(\frac{\pi}{4l} x^2 \sin \frac{\pi x}{2l} \right) \delta \dot{\varphi} + [\dot{\psi}(\tau) + \frac{\pi^2}{32l^2} \dot{\varphi}(\tau) x^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l} - \frac{3}{2E} (4(\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}) (\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}) - 2N_0 (\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l})) + \frac{3}{h^2} M \dot{M} \cos^2 \frac{\pi x}{4l}] (\delta \dot{N}_1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \delta \dot{N}_2) + \left[-\frac{\pi^2}{16l^2} \cos \frac{\pi x}{4l} \cdot \dot{\varphi} - \frac{3}{h^2 E} \left(3(\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}) M \cos \frac{\pi x}{4l} + 4(N_1 + N_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}) \dot{M} \cos \frac{\pi x}{4l} - 3N_0 \dot{M} \cos \frac{\pi x}{4l} \right) \cos \frac{\pi x}{4l} \delta \dot{M} \right] dx - 2hlP_0 \delta \dot{\psi} \end{aligned} \quad (38)$$

Перегруппируем составляющих, входящих в (38) по независимым вариациям:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^{2l} \{ (\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}) \delta \dot{\psi} dx + \int_0^{2l} \{ (\dot{N}_1 \frac{\pi^2}{32l^2} \cdot x^4 \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + \dot{N}_2 \frac{\pi^2}{32l^2} \cdot x^4 \cdot \sin^4 \frac{\pi x}{2l}) - \dot{M} \left(\frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} - \frac{\pi x^2}{2l^2} \cos \frac{\pi x}{4l} \right) + N_1 \frac{\pi^2}{16l^2} \dot{\varphi} x^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l} + N_2 \frac{\pi^2}{16l^2} \dot{\varphi} x^4 \sin^4 \frac{\pi x}{4l} \} \delta \dot{\varphi} dx + \int_0^{2l} \{ \dot{\psi}(\tau) + \frac{\pi^2}{32l^2} \dot{\varphi}(\tau) x^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l} - \frac{3}{2E} (4(N_1 \dot{N}_1 + (\dot{N}_1 N_2 + N_1 \dot{N}_2) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + N_2 \dot{N}_2 \sin^4 \frac{\pi x}{2l}) - 2N_0 (\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l})) + \frac{3}{h^2} M \dot{M} \cos^2 \frac{\pi x}{4l} \} \delta \dot{N}_1 dx + \int_0^{2l} \{ \dot{\psi}(\tau) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + \frac{\pi^2}{32l^2} \dot{\varphi}(\tau) x^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l} - \frac{3}{2E} (4(N_1 \dot{N}_1 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + (\dot{N}_1 N_2 + N_1 \dot{N}_2) \sin^4 \frac{\pi x}{2l} + N_2 \dot{N}_2 \sin^6 \frac{\pi x}{2l}) - 2N_0 (\dot{N}_1 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + \dot{N}_2 \sin^4 \frac{\pi x}{2l})) + \frac{3}{h^2} M \dot{M} \cos^2 \frac{\pi x}{4l} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + 2N_0 (\dot{N}_1 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + \dot{N}_2 \sin^4 \frac{\pi x}{2l}) \} \delta \dot{N}_2 dx + \int_0^{2l} \left[-\frac{\pi^2}{16l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{4l} \cdot \dot{\varphi} - \frac{3}{h^2 E} \left(3(\dot{N}_1 \cos^2 \frac{\pi x}{4l} + \dot{N}_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \cos^2 \frac{\pi x}{4l}) M + 4(N_1 \cos^2 \frac{\pi x}{4l} + N_2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \cos^2 \frac{\pi x}{4l}) \dot{M} - 3N_0 \dot{M} \cos^2 \frac{\pi x}{4l} \right) \delta \dot{M} \right] dx - 2hlP_0 \delta \dot{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Приравняем нулю коэффициенты при независимых вариаций.

$$2\dot{N}_1 + \dot{N}_2 - 4hP_0 = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 \rho^2}{32} (5,6 - \frac{15}{\pi^2} - \frac{95}{4\pi^4}) \dot{N}_1 - (2 - 8\pi - \frac{64}{\pi}) \dot{N}_2 + \frac{\pi^2 \rho^2}{16} (3,2 - \frac{24}{\pi^4}) (N_1 \dot{\varphi} + \\ & \dot{N}_1 \varphi) + \frac{\pi^2 \rho^2}{16} (2,4 - 15 \frac{1}{\pi^2} + \frac{191}{8} \frac{1}{\pi^4}) (N_2 \dot{\varphi} + \dot{N}_2 \varphi) = 0 \\ & 2\dot{\psi}(\tau) + \frac{\pi^2 \rho^2}{4} \dot{\varphi}(\tau) (0,4 - \frac{8}{\pi^4}) - \frac{12}{E} (N_1 \dot{N}_1 + (\dot{N}_1 N_2 + N_1 \dot{N}_2) + \frac{3}{4} N_2 \dot{N}_2) \\ & - \frac{3}{E} (-2N_0 (\dot{N}_1 + 4\dot{N}_2) + \frac{3}{h^2} M \dot{M}) = 0 \\ & [\psi(\tau) + \frac{\pi^2}{32l^2} \dot{\varphi}(\tau) [\frac{(2l)^7}{14} - \frac{3(4l)^7}{8\pi^7} (\frac{\pi^4}{8} - \frac{5\pi^2}{2} + 15) \frac{\pi}{2}]] \\ & - \frac{3}{2E} [4(N_1 \dot{N}_1 + \frac{3}{4} (\dot{N}_1 N_2 + N_1 \dot{N}_2) + \frac{1}{4} N_2 \dot{N}_2) - 2N_0 (\dot{N}_1 + \frac{3}{4} \dot{N}_2) + \frac{3}{h^2} M \dot{M} \\ & + 2N_0 (\dot{N}_1 + \frac{3}{4} \dot{N}_2)] = 0 \\ & - \frac{\pi^2}{16\rho^2} \cdot \dot{\varphi} - \frac{3}{h^2 E} (3(\dot{N}_1 + 4\dot{N}_2)M + 4(N_1 + 4N_2)\dot{M} - 3N_0 \dot{M}) = 0 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения безразмерных величин:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{N_1}{hE_{сек}}; \quad n_2 = \frac{N_2}{hE_{сек}}; \quad n_0 = \frac{N_0}{hE_{сек}} \quad p = \frac{P_0}{E_{сек}}; \quad f = \frac{\varphi}{l}; \\ m &= \frac{M}{h^2 E_{сек}}; \quad \gamma = \frac{l}{h} \gamma^2 \end{aligned}$$

Тогда предыдущая система получает вид:

$$\begin{aligned} & 2\dot{n}_1 + \dot{n}_2 - 4h\dot{p} = 0 \\ & \frac{\pi^2 \gamma^2}{32} (5,6 - \frac{15}{\pi^2} - \frac{95}{4\pi^4}) \dot{n}_1 - (2 - 8\pi - \frac{64}{\pi}) \dot{n}_2 + \frac{\pi^2 \gamma^2}{16} (3,2 - \frac{24}{\pi^4}) (n_1 \dot{f} + \\ & \dot{n}_1 f) + \frac{\pi^2 \gamma^2}{16} (2,4 - 15 \frac{1}{\pi^2} + \frac{191}{8} \frac{1}{\pi^4}) (n_2 \dot{f} + \dot{n}_2 f) = 0 \\ & 2\dot{\psi}(\tau) + \frac{\pi^2 \gamma^2}{4} \dot{f}(\tau) (0,4 - \frac{8}{\pi^4}) - 12 (n_1 \dot{n}_1 + (\dot{n}_1 n_2 + n_1 \dot{n}_2) + \frac{3}{4} n_2 \dot{n}_2) \\ & + 6(2n_0 (\dot{n}_1 + 4\dot{n}_2) + 3m\dot{m}) = 0 \\ & \psi(\tau) + \frac{\pi^2}{32\gamma^2} \dot{f}(\tau) [\frac{(2\gamma)^7}{14} - \frac{3(4\gamma)^7}{8\pi^7} (\frac{\pi^4}{8} - \frac{5\pi^2}{2} + 15) \frac{\pi}{2}] - \frac{3}{2} (4(n_1 \dot{n}_1 + \frac{3}{4} (\dot{n}_1 n_2 + n_1 \dot{n}_2) + \\ & \frac{3}{4} n_2 \dot{n}_2) - 2n_0 (\dot{n}_1 + \frac{3}{4} \dot{n}_2) + 12\gamma^2 m\dot{m} + 2n_0 (\dot{n}_1 + \frac{3}{4} \dot{n}_2)) = 0 \\ & - \frac{\pi^2}{16\gamma^2} \cdot \dot{f} - 3(3(\dot{n}_1 + 4\dot{n}_2)m + 4(n_1 + 4n_2)\dot{m} - 3n_0 \dot{m}) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Начальные условия для системы (40) будут:

При $t = 0$;

$$f(0) = \bar{f}; \quad \psi(0) = 0;$$

$$n_1(0) = n_2(0) = n_{10}(0) = n_{20}(0) = m(0) = m_0(0) = 0,$$

где \bar{f} – безразмерный начальный прогиб стержня.

Система дифференциальных уравнений (40) с учетом начальных условий решена на ЭВМ методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Полученные результаты показаны на графиках [5].

На рисунке 2 даны зависимости $p = p(\bar{\varphi})$ для различных значений $\bar{\varphi}_0$ и γ . Кроме этого, на рисунках даны зависимости критического момента выпучивания от начального прогиба. На рисунке дана зависимость критической сжимающей силы p от относительной толщины γ , при данном значении начального прогиба. Как видно из графиков, условная критическая сжимающая сила, значит и условное критическое время $t_{кр}$, уменьшается с ростом начального прогиба и относительной толщины γ . При расчетах длину шага брали $H=10^{-5}$.

Изложим алгоритм, по которому решена система (40). Систему (40) перепишем в следующем виде.

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_7, t) \quad (41)$$

где $i = \overline{1,5}$.

Если обозначить значения y_i ($i = \overline{1,5}$) в n -ом шаге через y_i^n ($i = \overline{1,5}$), то на $n+1$ -ом шагу значения этих величин по методу Рунге-Кутты четвертого порядка будут следующие [5]:

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{H}{6} (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})$$

где H – длина шага,

$$k_{1i} = f_i(y_1^n, y_2^n, \dots, y_7^n, t^n)$$

$$k_{2i} = f_i \left(y_1^n + \frac{H}{2} k_{11}, y_2^n + \frac{H}{2} k_{12}, \dots, y_7^n + \frac{H}{2} k_{17}, t^n + \frac{H}{2} \right)$$

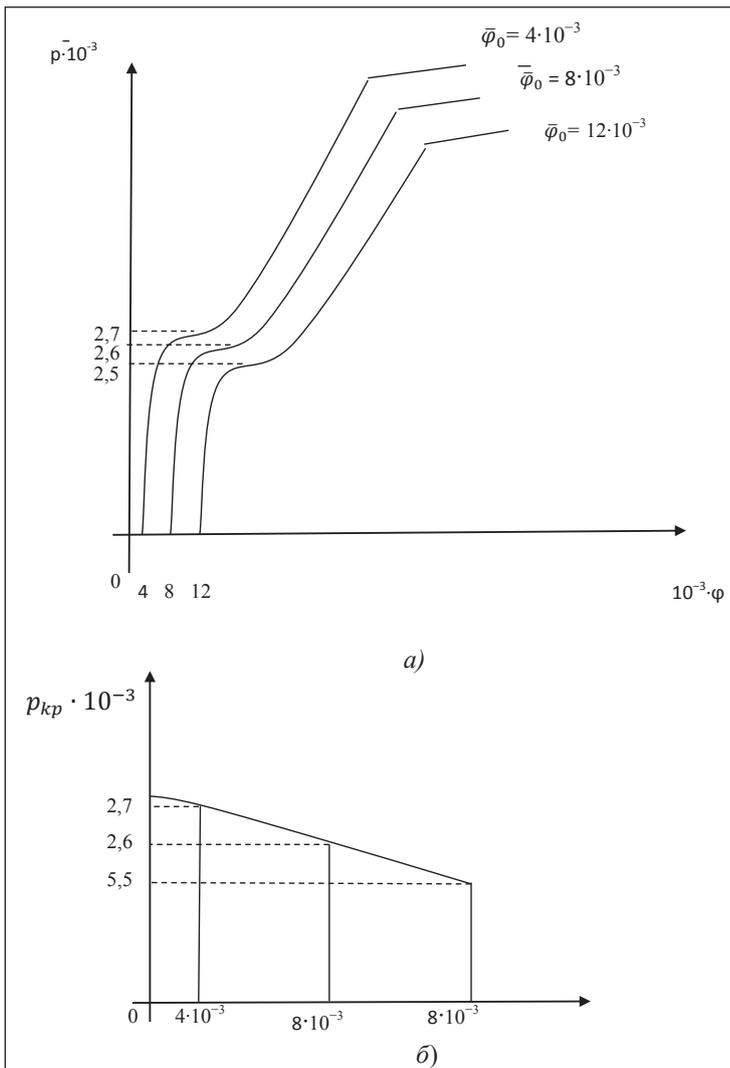


Рис. 2. Зависимость $p = p(\bar{\varphi})$ в различных значениях начального прогиба $\bar{\varphi}_0$ (а) и $p_{кр} = p_{кр}(\bar{\varphi}_0)$ (б) для прямого стержня при $\gamma=30$

$$k_{3i} = f_i \left(y_1^n + \frac{H}{2} k_{21}, y_2^n + \frac{H}{2} k_{22}, \dots, y_7^n + \frac{H}{2} k_{27}, t^n + \frac{H}{2} \right)$$

$$k_{4i} = f_i \left(y_1^n + Hk_{31}, y_2^n + Hk_{32}, \dots, y_7^n + Hk_{37}, t^n + H \right)$$

Ниже приводятся зависимости $p = p(\bar{\varphi})$ в различных значениях начального прогиба $\bar{\varphi}_0$ (а) и $p_{кр} = p_{кр}(\bar{\varphi}_0)$ (б) для прямого стержня при различных значениях относительной толщины γ .

Основные выводы. 1. Выбрана аппроксимация для прогиба сжимающего стержня, один конец которого закреплен шарнирно, а другой конец жестко закреплен.

2. Получено критическое значения для сжимающей силы с учетом влияния пористости материала на его механическое свойство.

3. Получены графические зависимости критической силы от относительной толщины и начального прогиба.

Список литературы:

1. Гасанов Р.А., Гулгазли А.С., Зейналов А.И. Общий вид уравнения состояния пористой среды Азербайджанское Нефтяное Хозяйство, № 9, 2016, с. 31-33.
2. A. Gulgazli, O. Efendiev. Variational principle for determining the stress-strain state of porous bodies. International journal of current research 2017, Vol. 9, Issue 10, p 59603-59607, October, 2017.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972.
4. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 275 с.
5. Ализаде А.Н., Гулгазли А.С. Вариационный принцип для определения напряженно-деформированного состояния упругой оболочки при облучении с учетом геометрической нелинейности. Изв. АН Азерб. ССР. Серия физ.-тех. и матем. наук, 1979, № 6, с. 84-87.

Efendiyev O.Y.

Azerbaijan University of Architecture and Construction

STABILITY OF A DIRECT ROD FROM POROUS MATERIAL, ONE END OF WHICH IS FIXED HARMONIC AND ANOTHER HARD

Summary

The problem of loss of stability of a straight rod with a rectangular cross section is considered in the article. One end of the rod is hinged and the other end is rigid. The material of the rod is porous. Therefore, the deformations and stresses are non-linear. The geometric nonlinearity in one of the transverse directions is also taken into account. Thus, the problem is both physically and geometrically nonlinear, hence its solution is associated with great mathematical difficulties. To eliminate these difficulties, a variational principle is applied in solving the problem. The Euler equations of the proposed functional give a system of nonlinear differential equations, which is solved using the fourth-order Runge-Kutta method. The dependencies of the critical values of the compressive force on the initial deflection of the relative length are plotted graphically.

Keywords: stability, porosity, wall thickness, physical nonlinearity, geometric nonlinearity, displacement, deformation, stress.