DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2019-1-65-69
УДК 531/532

Штефан Н.І., Гнатейко Н.В., Вірич С.І.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ДЕФОРМІВНИХ БУЛЬБАШОК ГАЗУ, РОЗТАШОВАНИХ У РІДИНІ

Анотація. У даній роботі розглянуто питання про динаміку деформівних бульбашок газу, поміщених в рідину. Математично бульбашкова модель відрізняється від ідеальної моделі та моделі руйнівної рідини тим, що в ній присутнє рівняння коливань бульбашки газу (рівняння Релея), що додає додаткові труднощі в розв'язання гідродинамічної задачі. Робота містить опис побудови математичної моделі динаміки бульбашки газу, розроблених методик і алгоритмів розрахунку коливань бульбашки газу, яка поміщена в рідину. Проаналізовано результати чисельних експериментів. Обґрунтовано доцільність використання моделі одиночної бульбашки.

Ключові слова: динаміка, гідродинаміка, ідеальна рідина, руйнівана рідина, бульбашкова рідина.

Shtefan Nataliia, Gnateyko Nonna, Virich Sviatoslav
National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

THE RESEARCH IN THE OSCILLATIONS OF DEFORMED GAS BUBBLES IN THE FLUID

Summary. This paper deals with a problem of the dynamics of deformed gas bubbles in the fluid. Mathematically, bubble model differs from the ideal and destructive one by oscillation equation of gas bubbles (the Rayleigh equation). This, in its turn, brings some extra difficulties in solving the hydrodynamic problem. The paper provides a description of the mathematical model construction of gas bubbles dynamics, the developed techniques and computation algorithms of the oscillation of gas bubbles in the fluid. The results of numerical experiments have been analyzed. The viability of using single bubble model has been proved.

Keywords: dynamics, hydrodynamics, perfect fluid, destructive fluid, bubble fluid.

Постановка проблеми. Проблема взаємодії конструкцій з бульбашковими рідинами, незважаючи на величезну кількість публікацій, і сьогодні залишається актуальною. Це, в першу чергу, пов'язано з тим, що вона не описується на основі класичних, сталих підходів гідромеханіки. Дана робота присвячена дослідженню динаміки бульбашок газу, що знаходяться в рідині.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останніх дослідженнях показано, що математично бульбашкова модель відрізняється від ідеальної моделі і моделі руйнівної рідини [1] тим, що в ній присутнє рівняння коливань бульбашки газу (рівняння Релея), що значно ускладнює роз'язання гідродинамічної задачі. Тобто, бульбашки газу, які знаходяться в рідині, можна розглядати як такі, що деформуються [2]. У разі малих коливань бульбашки можна вважати недеформівними [3; 4].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. У даній роботі розглянемо невирішене до цього питання з динаміки деформівних бульбашок газу, об'єм яких набагато менший всього об'єму суміші. Будемо розглядати динаміку бульбашок газу, поміщених в рідину, нехтуючи їх взаємодією, а також вважаючи, що вони знаходяться в умовах рівномірного всебічного тиску. Врахуємо також нелінійність в рівнянні коливань бульбашки газу. Розчиненням газу нехтуємо або вважаємо процеси розчинення і дифузії газу по рідині зрівноважуючими. Приймаємо, що довжина хвиль збурення набагато більша, ніж відстань між бульбашками газу, а також їх радіусів. При цьому відносна швидкість фаз дорівнює нулю. Суміші, для яких виконуються ці припущення, вивчаємо на основі звичайних рівнянь збереження гідродинаміки [3; 4].

Постановка завдання. Наведемо математичну модель динаміки деформівної бульбашки газу, яка міститься в рідині. При цьому зміна її радіусу описується рівнянням Релея. Також побудуємо та застосуємо аналітико-чисельний метод, метод Рунге-Кутта і метод покрокового перевизначення геометричних параметрів для дослідження динаміки бульбашки газу. Використовуючи програмну алгоритмічну реалізацію підрахунків методу скінченних різниць проведемо серію чисельних експериментів з аналізом отриманих результатів.

Виклад основного матеріалу. Як відомо, якщо зміна руху бульбашки газу відбувається порівняно швидко, то теплообміном можна знехтувати і використовувати адіабатичний закон, що і буде відображено в рівняннях (1). Рух стінки бульбашки газу при цьому описується рівнянням Релея [5]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_{ж}}\left(p_{Г} - p(t)\right),\ p_{Г} = p_o\left(\frac{R_o}{R}\right)^{3\gamma}. \quad (1)$$

Зазначимо, що отримання аналітичного рішення рівняння (1) можливо тільки для випадку постійного тиску p. У випадках довільної зміни тиску будемо використовувати аналітико-чисельний метод розв'язання (1).

Вводячи позначення:

$$K_1 = -\frac{3}{4R}, \qquad K_2 = \frac{P_Г - P_0}{2\rho R},$$

виразу (1) надамо вигляд:

$$\ddot{R} = 2K_2 + 2K_1 \cdot \dot{R}^2. \quad (2)$$

ТЕХНІЧНІ НАУКИ

Далі, проводячи заміну змінних $y = \dot{R}^2$, отримаємо

$$\frac{dy}{dR} = 2\ddot{R},$$

а рівняння (2) зведемо до рівняння із змінними коефіцієнтами, а саме:

$$\dot{y} + P(x)y = Q(x), \qquad (3)$$

де $\dot{y} = \dfrac{dy}{dR}; \quad P(x) = -4K_1 = \dfrac{3}{R};$

$$Q(x) = 4K_2 = \frac{2(P_\Gamma - P(t))}{\rho R}.$$

Загальний розв'язок (3) будуємо у формі:

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx + C\right]. \qquad (4)$$

Після математичного обчислення інтегралів, що входять в (4), останній вираз подамо у вигляді:

$$\dot{R} = \pm\sqrt{R^{-3}\left[\frac{2}{\rho}\left(p_o R_o^{3\gamma}\frac{R^{3(1-\gamma)}}{3(1-\gamma)} - \frac{pR^3}{3} + C\right)\right]}. \qquad (5)$$

Враховуючи початкові умови, а саме:

$$t = 0; \quad \dot{R}_0 = 0; \quad R = R_0; \quad P = P_0,$$

Визначимо сталу інтегрування C з (5):

$$C = \dot{R}^2R^3 - \frac{2}{\rho}\left(P_0R_0^{3\gamma}\frac{R^{3(1-\gamma)}}{3(1-\gamma)} - \frac{PR^3}{3}\right). \qquad (6)$$

Зауважимо, що вираз (5) будемо використовувати при чисельному розв'язанні рівняння Релея (1) у випадку змінного тиску P.

Використовуючи програмну алгоритмічну реалізацію підрахунків методу скінченних різниць були отримані чисельні результати з дослідження коливань бульбашки газу, яка міститься в рідині.

Геометрична інтерпретація динаміки бульбашки газу при різних початкових умовах тиску може бути отримана в результаті побудови фазової площини. При цьому стан бульбашки зображується точкою на площині з координатами $(R, \dot{R})$, а кінетика стану – неперервною кривою при $P = const$ (рис. 1). Таким чином, сімейство фазових кривих на рис. 1 відображає зміну стану бульбашки газу при різних величинах тисків.

Рис. 1. Фазові криві рівняння Релея

Окремо розглянемо випадок малих коливань бульбашки газу, поміщеного в рідину. Тоді необхідне виконання умов:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} << 1, \frac{V'}{V_0} << 1,$$

що визначає відхилення густини від рівноважного значення і малість коливань. Тут V' – збурення об'єму бульбашки.

Зауважимо, що при формулюванні задачі гідропружності [1], поведінку бульбашкової рідини описуємо в рамках частково лінеаризованої моделі. Під лінеаризацією в даному випадку розуміємо використання останніх співвідношень.

У разі малих коливань бульбашки в рідині рівняння Релея

$$aV^{-1/3}\ddot{V} - aV^{-4/3}\dot{V}^{2/6} = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma - \frac{2\sigma}{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}} + \rho_0\left[\frac{\frac{d\psi}{dt} + (\nabla\psi)^2}{2}\right] \qquad (7)$$

буде перетворено до вигляду:

$$\ddot{V} + \omega_o^2V = \varepsilon\rho_o\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (8)$$

де $\omega_0^2 = \dfrac{3\gamma P_0}{R_0^2\rho_0}; \quad \varepsilon = \dfrac{4\pi R_0}{\rho_0}.$

Рівняння (8) являє собою лінеаризований варіант рівняння Релея і містить дві невідомі величини: V та ψ. Для їх визначення спільно з (8) будемо розглядати хвильове рівняння руху бульбашкового середовища, наприклад, для випадку циліндричного бака з пружним дном [1]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + n\frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (9)$$

Таким чином, рівняння (8) та (9) представляють собою систему двох рівнянь з двома невідомими.

Для інтегрування отриманої системи рівнянь (8) та (9) застосовуємо математичний апарат методу скінченних різниць.

При розгляді задачі гідропружності, сформульованої в [1], хвильове рівняння руху рідини (9) при прямуванні n (концентрації бульбашок) до нуля, переходить в рівняння, яке характеризує ідеально-пружну рідину.

Для врахування нелінійного характеру коливань бульбашки газу при розвязанні лінеаризованого рівняння Релея (8) пропонується ефективний алгоритм, суть якого полягає в штучному перевизначенні на кожному часовому кроці коефіцієнтів в (8). Цей алгоритм ми надалі будемо називати алгоритмом покрокового перевизначення параметрів бульбашки газу.

Аналіз результатів численних експериментів. Отже,вякостітестовоїрозглядаласязадачапроколивання одиночної бульбашки газу в воді. Прийняті розрахункові варіанти відповідали різним початковим радіусам бульбашки $R_0 = 0,23\cdot10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$ см. Основні результати чисельних експериментів, виконаних з використанням різних методик, наведені на рис. 2 і рис. 3. Зміна радіуса бульбашки під дією косинусоїдального навантаження $P = P_0 + A\cos(\omega\pi t)$ при $A = 0{,}1$ МПа показана на рис. 2.

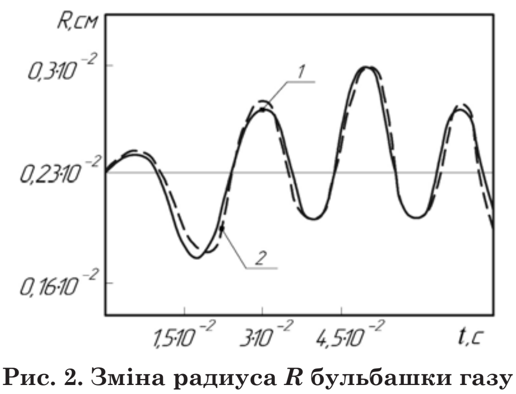

Рис. 2. Зміна радиуса R бульбашки газу при косинусоїидальному навантаженні

Випадок експоненціального навантаження $P = Ae^{\alpha a_0 t}$ при A = 0,2 МПа показаний на рис. 3. Як видно з рис. 2 і рис. 3, результати щодо змін амплітуди коливань стінок бульбашки газу, розрахованих за різними методиками, добре узгоджуються. При цьому крива 1 на цих рисунках відповідає випадку використання аналітико-чисельного методу і методу Рунге-Кутта (результати практично збігаються, тому побудована одна крива), а крива 2 відповідає використанню методу покрокового перевизначення геометричних параметрів.

Зазначимо, що серія тестових розрахунків, відповідних варіантам радіусів $R_0 = 10^{-4}$ см та $R_0 = 10^{-3}$ см також добре узгоджується з результатами наведеними в [6; 7]. Разом з тим необхідно вказати на те, що точність чисельного розв'язку рівняння Релея з використанням різних алгоритмів залежить від амплітуди діючого тиску.

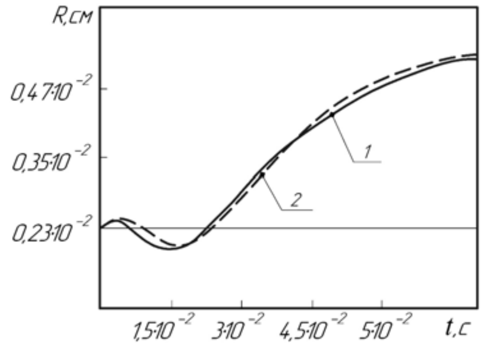

Рис. 3. Зміна радиуса *R* бульбашки газу при экспоненціальному навантаженні

Висновки з проведених досліджень і перспективи подальших досліджень у цьому напрямку. Перевірку працездатності, точності та ефективності запропонованих алгоритмів розрахунку динаміки деформівної бульбашки газу, яка міститься в рідині, в цілому здійснювали на основі проведеної серії чисельних експериментів шляхом порівняння результатів розрахунків, отриманих за методиками, розробленими в даній роботі, з результатами інших авторів. В роботі проведено вивчення динаміки одиночної бульбашки газу, яка знаходиться в рідині, по побудованій відповідній математичній моделі з урахуванням нелінійного характеру коливань бульбашки при різних видах навантаження, а також початкових умовах.

У подальших дослідженнях буде вивчено взаємовплив бульбашок газу, оцінено міжцентрову відстань, при якій цим взаємовпливом не можна нехтувати. Потім, на основі цих та подальших результатів чисельних експериментів, буде проведено дослідження динамічної взаємодії пружної конструкції з бульбашковими рідинами з урахуванням і без урахування взаємовпливу між газовими бульбашками.

Список літератури:

1. Штефан Н.І., Телестакова В.В. Динаміка співвісних циліндричних оболонок, заповнених бульбашковою рідиною // Молодий вчений. 2018. № 1(53). С. 578-580. URL: http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2018/1/136.pdf.
2. Штефан Н.И. Исследование динамического поведения пузырька газа, находящегося в жидкости // 82 международная научно-техническая конференция. Беларусь, БГТУ, Минск. 2018.
3. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
4. Павловский В.С., Пелых Н.А. Исследование движения газовых пузырьковв вибрирующем цилиндрическом сосуде с двухслойной жидкостью // «Прикладная механика». 1981. № 17. С. 103-110.
5. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем. К., 1981. 276 с.
6. Галиев Ш.У. Нелинейные волны различной физико-механической природы в ограниченной сплошной среде // Пробл. прочности. 1985. № 12. С. 3-14.
7. Авдеев К.А. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду / К.А. Авдеев, В.С. Аксенов, А.А. Борисов, Р.Р. Тухватуллина, С.М. Фролов, Ф.С. Фролов // Горение и взрыв. 2015, т. 8, № 2. С. 45-56.