

DOI: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2019-2-66-52>

УДК 539.3

Трубачев С.І., Колодежний В.А., Петрик В.О., Сіренко А.П.
 Національний технічний університет України
 «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯ НАПРУЖЕНЬ В ЦИЛІНДРІ З ОТВОРАМИ

Анотація. В роботі розглянута термопружна постановка задачі про напружено-деформований стан в товстостінному циліндрі. Відмічено, що у випадку, коли тіла обертання мають складну геометричну форму або неоднорідні фізико-механічні характеристики по осі обертання і радіусу, використання аналітичних методів розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану є неефективним, тому необхідно орієнтуватися на чисельні методи. Вказано, що якщо у якості чисельного методу використовувати метод скінченних елементів, то виникає також питання вибору типу скінченних елементів. В даній роботі також розв'язана методом скінченних елементів в термопружній постановці задача про напружений стан в перфорованому товстостінному циліндрі з використанням як чотирьохвузлових оболонкових, так і тривимірних восьмивузлових призматичних скінченних елементів. Досліджений рівень концентрації напружень поблизу отворів циліндричної перфорованої труби, при цьому величина отриманого коефіцієнта концентрації напружень досягає 2. Показано, що рішення даної задачі з використанням оболонкової моделі циліндра дає занижені значення напружень, при цьому не враховується концентрація напружень на внутрішній поверхні оболонки.

Ключові слова: циліндр, напружений стан, термопружність, чисельне моделювання, скінченний елемент.

Trubachev Serhii, Kolodezhnyi Valerii, Petryk Vladyslav, Sirenko Anatolii
 National Technical University of Ukraine
 «Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky»

NUMERICAL MODELING OF THE STRESS FIELD IN THE CYLINDER WITH HONORS

Summary. In this paper, the thermoelastic formulation of the problem of a stress-strain state in a thick-walled cylinder is considered. It is noted that in the case when the bodies of rotation have a complicated geometric shape or heterogeneous physical and mechanical characteristics on the axis of rotation and radius, the use of analytical methods for solving the problem of determining the stress-strain state is ineffective. For example, to solve the problem of a stress-deformed state in a thick-walled cylinder with many openings, using analytical approaches for this, one has to face the problem of summation of infinite series and the calculation of singular integrals; therefore, it is necessary to rely on numerical methods. It is specified that if the method of finite elements is used as a numerical method, then there is also a question of choosing the type of finite elements. In this paper, the problem of the stress state in a perforated thick-walled cylinder with the use of both shell finite elements with four nodes and three-dimensional prismatic finite elements with eight nodes is solved by the method of finite elements in a thermoelastic formulation. The choice of this type of finite elements allows to determine with high accuracy the stress-strain state and take into account the existing local increase of stresses in a cylindrical thick-walled tube with many openings. The obtained field of stresses in a pipe is analyzed and the level of local increase of stresses near the openings of a cylindrical pipe is investigated. It is noted that the magnitude of the obtained coefficient of local stress increase reaches 2. In the work it is shown that the solution of this problem, taking into account the reduced rigidity when using the shell model of the cylinder, gives understated stresses, while the increase of stresses on the inner surface of the shell is not taken into account.

Keywords: cylinder, stress state, thermoelasticity, numerical simulation, finite element.

Постановка проблеми. Перфоровані елементи застосовуються в колекторах атомних енергетичних установок, хімічних апаратах, будівельній техніці. Перфорація дозволяє зменшити матеріалоемність дорогого виробів, облегшити конструкцію, а також виконується із конструктивних міркувань. При цьому поблизу отворів має місце концентрація напружень, що істотно знижує довговічність перфорованих частин виробів. Це обумовлює **актуальність дослідження** напружено-деформованого стану в перфорованих деталях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При використанні для розв'язання даної задачі аналітичних підходів доводиться стикатися з проблемою підсумовування нескінченних рядів і обчислення сингулярних інтегралів [1; 2]. Більшість чисельних процедур засновані на скінченноелементній методиці розв'язання [3–5], яка більш уні-

версальна, але вимагає переформування скінченноелементної моделі відповідно до розв'язуваної задачі, тому для зменшення трудовитрат важливо, яка скінченноелементна модель використовується в розрахунках. Дана робота є розвитком раніше виконаних розрахунків напружень і деформацій в перфорованих трубах [6; 7].

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Недостатньо досліджень, в яких здійснюється порівняння застосовуваних в розрахунках перфорованих елементів чисельних моделей, які програмно реалізовані і апробовані на практичних задачах.

Метою статті є визначення напружень в перфорованому циліндрі, дослідження концентрації напружень на підставі порівняння з результатами для гладкого циліндра, а також вибір для розрахунку більш раціональної скінченноелементної моделі.

Виклад основного матеріалу. Важливим класом задач термопружності є задачі, в яких розглядаються тіла обертання, що знаходяться в умовах осесиметричного термомеханічного навантаження. Ці задачі зручно розглядати в циліндричній системі координат. Оскільки область дослідження напружено-деформованого стану та умови навантаження неосесиметричні, то компоненти вектора переміщень, тензорів деформацій і напружень залежать не тільки від осової, але і від радіальної координати. Залежність від кутової координати відсутня, кутувий компонент вектора переміщень дорівнює нулю. У цьому випадку співвідношення Коші, які пов'язують компоненти тензора деформації і вектора переміщень, приймають вид [8; 9]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U_r}{r}, & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\ \gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right), & \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi r} = \gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для лінійно-пружного ізотропного матеріалу можна отримати вирази для компонентів тензора напружень:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\mu} \left((1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\mu} \left((1-\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \mu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right), \\ \sigma_{zz} = \frac{2G}{1-2\mu} \left((1-\mu)\varepsilon_{zz} + \mu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right), \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} = G\gamma_{rz} = G\gamma_{zr}, \end{cases} \quad (2)$$

де G і ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона, ε^T – температурна деформація. При цьому $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0$ і $\tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$.

З трьох рівнянь рівноваги для тривимірного випадку при розгляді осесиметричної задачі залишаються тільки два рівняння:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + f_r^0 = 0, \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + f_z^0 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де f_r^0 і f_z^0 – радіальний і осьовий компоненти заданого вектора розподіленої об'ємної сили. Якщо на частині контуру Γ' осьового перерізу тіла обертання задані розподілені поверхневі сили з компонентами p_r^0 і p_z^0 , то силові граничні умови необхідно представити у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_{rr}n_r + \tau_{rz}n_z = p_r^0, \\ \tau_{rz}n_r + \sigma_{zz}n_z = p_z^0, \end{cases} \quad (4)$$

де n_r , n_z – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до частини контура Γ' . Кінематичні граничні умови на частині контура Γ'' осьового перерізу приймають вид

$$U_r(p) = U_r^0(p), U_z(p) = U_z^0(p), p \in \Gamma'', \quad (5)$$

де $U_r^0(p)$ і $U_z^0(p)$ – компоненти заданого вектора $U^0(p)$ переміщень точок $p \in \Gamma''$.

Таким чином, для розв'язання осесиметричної задачі термопружності необхідно знайти десять функцій: два компоненти вектора переміщень і по чотири компоненти тензорів деформації і напружень, використовуючи два рівняння рівнова-

ги (3), чотири співвідношення Коші (1) і закону Гука (2), задовольняючи при цьому граничним умовам (4) і (5).

Розглянемо розв'язання осесиметричної задачі в переміщеннях. Об'ємну деформацію виразимо, як в [8]:

$$\theta = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r = \frac{\partial U_z}{\partial z} + D U_r, \quad (6)$$

де $D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$ – відповідний оператор.

Якщо підставити (6) в фізичні рівняння (2), а потім вирази, отримані для напружень підставити в умови (3) при постійних значеннях фізико-механічних властивостей конструкційного матеріалу і відсутності об'ємних сил для ізотермічної задачі теорії пружності, отримаємо два диференціальних рівняння щодо функцій $U_z(r, z)$ і $U_r(r, z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} D \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial z} (D U_r) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (D U_r) + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Проінтегрувавши рівняння (7), знайдемо функції $U_z(r, z)$ і $U_r(r, z)$, які повинні задовольняти рівнянню (7) і граничним умовам на поверхні, які повинні бути записані в переміщеннях. Введемо оператор D^2 так, що

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (8)$$

Якщо з умов (7) виключити величину U_z , будемо мати

$$\frac{\partial^4 U_r}{\partial z^4} + 2D^2 \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + D^2 D^2 U_r = 0. \quad (9)$$

Аналогічно можна записати диференціальне рівняння четвертого порядку, якому має задовольняти переміщення U_z :

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} D \frac{\partial U_z}{\partial z} + \left(D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 U_z = 0. \quad (10)$$

Отже, розв'язок осесиметричної ізотермічної задачі теорії пружності в переміщеннях зводилося до розв'язання двох диференціальних рівнянь четвертого порядку (9) і (10).

У разі, коли тіла обертання мають складну геометрію або неоднорідні фізико-механічні характеристики по осі обертання і радіусу, використання аналітичних методів розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану є неефективним, тому необхідно орієнтуватися на чисельні методи, наприклад, метод скінченних елементів (МСЕ) [3–5, 10].

У більшості випадків при розв'язанні осесиметричної задачі за допомогою МСЕ розв'язання зводиться до знаходження на двовимірній сітці скінченних елементів вузлових значень двох компонентів вектора переміщень $U = (U_r, U_z)^T$. Це дозволяє при розв'язанні осесиметричної задачі використовувати двовимірні скінченні елементи, як і у випадку плоскої задачі. Але в разі, коли осесиметрична конструкція має складну форму, наприклад, перфоровані товстостінні циліндричні оболонки, які широко використовуються в енергетиці, виникає питання постановки задачі і вибору типу скінченних елементів. З огляду на те,

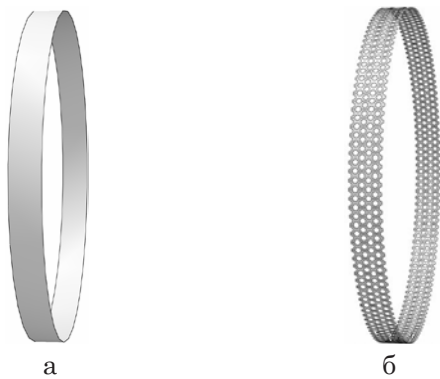


Рис. 1. Розрахункові геометричні моделі, що розглядаються:

а – модель оболонки з приведеною жорсткістю, б – модель перфорованої оболонки

Джерело: розроблено авторами

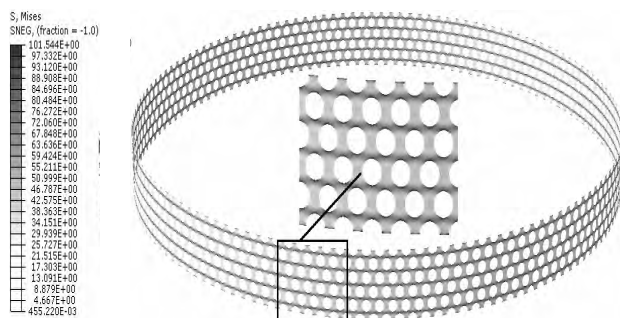


Рис. 2. Концентрація напружень в перфорованому кільці

Джерело: розроблено авторами

що в отворах перфорованих товстостінних оболонок виникає концентрація напружень, доцільно використовувати тривимірні скінченні елементи і розглядати задачу в тривимірній постановці.

У даній роботі для розрахунку перфорованих оболонок використовувалися як чотирьохвузлові оболонкові, так і тривимірні восьмикузові

призматичні скінченні елементи. Вибір такого підходу дозволяє з високою точністю визначити напружено-деформований стан конструкційних елементів з урахуванням концентрації напружень поблизу отворів.

Розглянемо товстостінний перфорований циліндр із зовнішнім діаметром 1072 мм, товщиною стінки 136 мм і діаметром перфоруєчих отворів 13,2 мм. Циліндр навантажений внутрішнім тиском, що дорівнює 10 МПа. В якості матеріалу циліндра була використана нержавіюча сталь 08X18H10T з наступними механічними властивостями: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,24$. Циліндр може безперешкодно розширюватися. Один кінець циліндра зафіксований в осьовому напрямку.

При розв'язанні задачі за допомогою оболонкових скінченних елементів доцільно розглядати циліндричне кільце, вид якого наведено на рис. 1, а, б. Спочатку було розглянуто перфороване кільце (рис. 1, б), навантажене внутрішнім тиском. При цьому переміщення кільця в радіальному напрямку складо 0,132 мм. Такому переміщенню відповідає товщина суцільного циліндричного кільця 65 мм (рис. 1, а). При цьому максимальне напруження в суцільному кільці складо 59 МПа, а в перфорованому кільці – 101,5 МПа. На рис. 2 наведено концентрацію напружень, причиною якої є перфорація оболонки круглими отворами. Величина коефіцієнта концентрації напружень досягає 2.

Висновки і пропозиції. В роботі наведений аналітичний опис задачі теорії пружності для перфорованого товстостінного циліндра в термомеханічній постановці. Показано, що для розв'язання задач про напружено-деформований стан перфорованих циліндрів необхідно використовувати чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів. Причому для товстостінних перфорованих циліндрів доцільно використовувати тривимірні скінченні елементи. В роботі показано, що розв'язання задачі з урахуванням приведеної жорсткості для оболонкової моделі дає занижене значення напружень, при цьому не враховується концентрація напружень на внутрішній поверхні оболонки.

Список літератури:

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. М., 1970. 556 с.
2. Чемерис О.М., Колодежний В.А., Трубочев С.И. Будівельна механіка машин. Київ, 2017. 258 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18961>
3. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. Москва, 1975. 542 с.
4. FKM-Guideline. Analytical Strength Assessment of Components in Mechanical Engineering / Frankfurt/Main, 2003. 268 p.
5. Норри Д., Фрид Ж. Введение в метод конечных элементов. Москва, 1981. 304 с.
6. Яхно Б.О., Трубочев С.И. Напряжено-деформированное состояние цилиндрических толстостенных перфорированных оболочек. *Вісник НТУУ "КПІ". Машинобудування*. 2013. Вип. 67. С. 126–130.
7. Трубочев С.И., Колодежний В.А. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану гнбів трубопроводів. *Молодий вчений*. 2018. № 1. С. 443–445. URL: <http://molodyucheny.in.ua/files/journal/2018/1/102.pdf>
8. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. Москва, 2005. 352 с.
9. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. Київ, 2002. 308 с.
10. Getting Started with ABAQUS / USA : Abaqus inc., 2003. 497 p.

References:

1. Grigolyuk E.I., Fil'shtinskij L.A. (1970). Perforirovannye plastiny i obolochki [Perforated plates and shells]. Moscow : Nauka. (in Russian)
2. Chemerys O.M., Kolodezhnyi V.A., Trubachev S.I. (2017). Budivelnna mekhanika mashyn [Construction machinery mechanics]. Kyiv : National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky». URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18961> (in Ukrainian)
3. Zenkevich O.C. (1975). Metod konechnykh ehlementov v tekhnike [Finite element method in technique]. Moscow : Nauka. (in Russian)

4. FKM–Guideline. Analytical Strength Assessment of Components in Mechanical Engineering (2003). Frankfurt/Main.
5. Norri D., Frid Z.H. Vvedenie v metod konechnykh ehlementov [Introduction to the finite element method]. Moscow : Mir. (in Russian)
6. Yahno B.O., Trubachev S.I. (2013). Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie cilindricheskih tolstostennykh perforirovannykh obolochek [The stress-strain state of cylindrical thick-walled perforated shells]. *Journal of mechanical engineering of the National technical university of Ukraine «Kyiv polytechnic institute»*, no. 67, pp. 126–130.
7. Trubachev S.I., Kolodezhnyi V.A. (2018). Chyselne Modeliuvannia Napryazhenno-Deformovanoho Stanu Hybiv Truboprovo-Div [Numerical simulation of the stress-strain state of pipelines]. *Molodyi vchenyi*, no. 1. pp. 443–445. URL: <http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2018/1/102.pdf>
8. Zarubin V.S., Stankevich I.V. (2005). Raschet teplonapryazhennykh konstrukcij [Calculation of heat-stressed structures]. Moscow : Mashinostroenie. (in Russian)
9. Mozharovskiy M.S. (2002). Teoriya pruzhnosti, plastychnosti i povzuchosti [The theory of elasticity, plasticity and creep]. Kyiv : Vy`shha shkola. (in Ukrainian)
10. Getting Started with ABAQUS (2003). USA : Abaqus inc.