DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2019-8-72-34
УДК 528.247

Согор А.Р., Согор М.А.
Національний університет «Львівська політехніка»

ПРО ВПЛИВ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПОПРАВОК НА ВИЗНАЧЕННЯ АНОМАЛІЙ СИЛИ ВАГИ

Анотація. В даній роботі одержані числові значення еліпсоїдальних поправок при обчисленні елементів аномального гравітаційного поля Землі. Доведена доцільність врахування даних еліпсоїдальних поправок при визначенні аномалій сили ваги Δg методом порівняння їх результатів із точністю, яка забезпечується сучасними гравіметричними супутниковими даними. Аномалія сили ваги Δg практично не залежить від зміщення координатної системи, тому еліпсоїдальну поправку $e^2\Delta g_1^1$ можна не враховувати при обчисленнях аномального гравітаційного поля Землі. Аномалія сили ваги досить сильно залежить від стиснення α референц-еліпсоїда. Рекомендовано для визначення аномалій сили ваги Δg включати еліпсоїдальну поправку $e^2\Delta g_2^1$ у розклад в ряд за сферичними функціями, оскільки нехтування такої поправки в середньому для території України дає похибку порядку точності сучасних гравіметричних супутникових даних.

Ключові слова: альтиметро-гравіметричні обчислення, аномалія сили ваги, аномальне гравітаційне поле, висота геоїда, гравіметричні супутникові дані, еліпсоїдальна поправка, сферичні функції.

Sohor Andrii, Sohor Markiian
Lviv Polytechnic National University

ON THE INFLUENCE OF ELLIPSOIDAL CORRECTIONS ON THE DETERMINATION OF ANOMALIES OF GRAVITY

Summary. The elements of an anomalous gravitational field, such as an anomaly of gravity or height of a geoid, are relatively small. Therefore, in formulas that associate these quantities, they ignore the compression of the reference ellipsoid, using a spherical approximation for the calculations. Spherical approximation is the basis for almost all formulas of physical geodesy. The spherical approximation gives an error that is neglected in most practical applications. Lelgemann showed that when applying the Stokes formula, this error for the heights of the geoid averaged across the Earth gives an order of magnitude of ±0.2 m. This was an order of magnitude less than the accuracy provided by modern gravimetric satellite data at that time. Ellipsoidal corrections should be considered for higher accuracy. This can be done by the method proposed by Zagrebin and used by many modern researchers. That is, an arbitrary element F of the anomalous gravitational field (disturbing potential, height of the geoid, anomaly of gravity, etc.) is arranged in a series by a small parameter ε characterizing the deviation of the reference-ellipsoid from the sphere. This parameter ε may be compression α or any other parameter of the ellipsoid, such as the square of the first eccentricity e^2. In this paper we obtain numerical values of ellipsoidal corrections in the calculation of elements of the anomalous gravitational field of the Earth. The expediency of taking these ellipsoidal corrections into account when determining the anomalies of gravity Δg by comparing their results with the accuracy provided by modern gravimetric satellite data. The gravity anomaly Δg is almost independent of the offset of the coordinate system, so the ellipsoidal correction $e^2\Delta g_1^1$ can not be taken into account when calculating the Earth's anomalous gravitational field. The anomaly of gravity depends very much on the compression of the α reference-ellipsoid. It is recommended to determine the anomalies of gravity Δg to include an ellipsoidal correction $e^2\Delta g_2^1$ in a decomposition in a series of spherical functions, because the disregard of such an correction on the average for the territory of Ukraine gives an error in the order of accuracy of modern gravimetric satellite data.

Keywords: altimeter-gravimetric calculations, anomaly of gravity, anomalous gravity field, height of geoid, gravimetric satellite data, ellipsoidal correction, spherical functions.

Постановка проблеми. Елементи аномального гравітаційного поля, такі як аномалія сили ваги або висота геоїда, відносно малі. Тому в формулах, що пов'язують ці величини, нехтують стисненням референц-еліпсоїда, використовуючи для обчислень сферичну апроксимацію.

Сферична апроксимація є базовою майже для всіх формул фізичної геодезії.

Сферична апроксимація дає похибку, якою в більшості практичних застосувань нехтують. Так Лельгеман [9] показав, що при застосуванні формули Стокса ця похибка для висот геоїда в середньому на всю Землю дає величину порядку ±0,2 м. Це було на порядок менше точності, яка забезпечувалась сучасними гравіметричними супутниковими даними на той час.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для отримання більш високих точностей слід враховувати еліпсоїдальні поправки. Це можна зробити методом, яким після роботи Загребіна [3] користується багато дослідників [1; 2; 8].

Довільний елемент F аномального гравітаційного поля (збурюючий потенціал, висоту геоїда, аномалію сили ваги і т.д.) розкладають в ряд за малим параметром ε, що характеризує відхилення референц-еліпсоїда від сфери [6]:

$$F = F^0 + \varepsilon F^1 + \varepsilon^2 F^2 + \varepsilon^3 F^3 + \dots .$$

Таким параметром ε може бути стиснення α або будь-який інший параметр еліпсоїда, наприклад, квадрат першого ексцентриситета

$$\varepsilon = e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Через малі значення вище перелічених величин квадратами та більш високими степенями ε можна знехтувати. В результаті чого даний ряд можна записати

$$F = F^0 + e^2 F^1.$$

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Спробуємо в такому вигляді представити кожний елемент аномального гравітаційного поля. Він залежить від положення точки в просторі, що виражається, наприклад, геодезичними координатами ϕ (широта) та λ (довгота). В цьому випадку даний ряд в лінійному вигляді можна записати більш конкретніше

$$F(\phi,\lambda) = F^0(\phi,\lambda) + e^2F^1(\phi,\lambda).$$

Оскільки функція $F^0(\phi,\lambda)$ відповідає $e = 0$, то її можна розглядати як функцію на певним чином визначеній сфері, наприклад, на середній земній сфері з радіусом

$$R = \sqrt[3]{a^2b} = 6371 \ км.$$

Причому, координати ϕ і λ — сферичні координати на цій сфері. Таким чином, можна встановити взаємно однозначне відображення референц-еліпсоїда на сферу з радіусом R проектуванням точки з геодезичними координатами (ϕ,λ) на еліпсоїді в точку зі сферичними координатами (ϕ,λ) на сфері (значення ϕ і λ однакові для обидвох точок).

Постановка завдання. Одержати числові значення еліпсоїдальних поправок при обчисленні елементів аномального гравітаційного поля Землі. Довести або спростувати доцільність врахування даних еліпсоїдальних поправок при визначенні аномалій сили ваги Δg методом порівняння їх результатів із точністю, яка забезпечується сучасними гравіметричними супутниковими даними [10; 11].

Виклад основного матеріалу. Аномалію сили ваги Δg можна представити у вигляді, запропонованому Моріцом у роботі [6], тобто

$$\Delta g = \Delta g^0 + e^2\Delta g^1, \tag{1}$$

де

$$\Delta g^0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{n-1}{R}P_{nm}(\sin\phi)\left(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda\right); \tag{2}$$

$$\Delta g^1 = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}P_{nm}(\sin\phi)\left(G_{nm}\cos m\lambda + H_{nm}\sin m\lambda\right) \tag{3}$$

з

$$\left.\begin{aligned} G_{nm} &= \chi_{n+2,m}A_{nm} + \lambda_{n+2,m}A_{n+2,m} + \mu_{n+2,m}A_{n+4,m} \ ; \\ H_{nm} &= \chi_{n+2,m}B_{nm} + \lambda_{n+2,m}B_{n+2,m} + \mu_{n+2,m}B_{n+4,m} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

і

$$\left.\begin{aligned} \chi_{nm} &= -\frac{3(n-3)(n-m-1)(n-m)}{2(2n-3)(2n-1)}; \\ \lambda_{nm} &= \frac{n^3-3m^2n-9n^2-6m^2-10n+9}{3(2n+3)(2n-1)}; \\ \mu_{nm} &= -\frac{(3n+5)(n+m+2)(n+m+1)}{2(2n+5)(2n+3)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Запишемо перший член розкладу Δg, тобто

$$\Delta g_1 = \Delta g_1^0 + e^2\Delta g_1^1. \tag{6}$$

Із формули (2) неважко зауважити, що оскільки $n = 1$, то

$$\Delta g_1^0 = 0. \tag{7}$$

Оскільки сферична апроксимація Δg_0^1 рівна нулю, слід дослідити елемент еліпсоїдальної поправки Δg_1^1, який запишеться

$$\Delta g_1^1 = \frac{1}{R}\left[P_{10}(\sin\phi)G_{10} + P_{11}(\sin\phi)\left(G_{11}\cos\lambda + H_{11}\sin\lambda\right)\right]. \tag{8}$$

Відомо, що

$$\left.\begin{aligned} P_{10}(\sin\phi) &= \sin\phi \ ; \\ P_{11}(\sin\phi) &= \cos\phi \ . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Підставляючи відповідні величини із виразу (5) у формулу (4), отримаємо

$$\left.\begin{aligned} G_{10} &= \chi_{30}A_{10} + \lambda_{30}A_{30} + \mu_{30}A_{50} \ ; \\ G_{11} &= \chi_{31}A_{11} + \lambda_{31}A_{31} + \mu_{31}A_{51} \ ; \\ H_{11} &= \chi_{31}B_{11} + \lambda_{31}B_{31} + \mu_{31}B_{51} \ . \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Маючи формули (8) – (10), можна знайти числову характеристику елемента еліпсоїдальної поправки Δg_1^1. Для цього необхідно вибрати якусь точку O зі сферичними координатами ϕ,λ (див. формулу (8)). Досить доречно за точку $O(\phi,\lambda)$ вибрати центр сфероїдальної трапеції, в яку вписується територія України, оскільки вона (точка) буде розміщена поблизу географічного центру України з координатами: $\phi_0 = 48.3°$, $\lambda_0 = 30.8°$.

За основні фундаментальні параметри Землі приймають такі величини [1; 8]:

$$\left.\begin{aligned} R &= 6371000 \ \ м \ ; \\ fM &= 398600.5\times10^9 \ \ м^3 \ / \ c^2 \ . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Безрозмірні гармонічні коефіцієнти C_{nm} і S_{nm} (наприклад, за моделлю GEM 10) мають наступні значення:

$$\left.\begin{aligned} C_{30} &= 2.535\times10^{-6} \ ; \quad C_{50} = \ \ 2.29\times10^{-7} \ ; \\ C_{31} &= 2.192\times10^{-6} \ ; \quad C_{51} = -4.4\times10^{-8} \ ; \\ S_{31} &= 2.72\times10^{-7} \ \ ; \quad S_{51} = -8.0\times10^{-8} \ . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Тоді величини із формул (5) будуть рівні

$$\left.\begin{aligned} \chi_{30} &= 0 \ ; \quad \lambda_{30} = -\frac{5}{9} \ ; \quad \mu_{30} = -\frac{140}{99} \ ; \\ \chi_{31} &= 0 \ ; \quad \lambda_{31} = -\frac{29}{45} \ ; \quad \mu_{31} = -\frac{70}{33} \ . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Оскільки відомо [8], що

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{fM}{R}C_{nm} \ ; \\ B_{nm} &= \frac{fM}{R}S_{nm} \ , \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

то

$$\left.\begin{aligned} A_{30} &= 158.6 \ м^2 \ / \ c^2; \quad A_{50} = 14.3 \ м^2 \ / \ c^2; \\ A_{31} &= 137.1 \ м^2 \ / \ c^2; \quad A_{51} = -2.7 \ м^2 \ / \ c^2; \\ B_{31} &= \ \ 17.0 \ м^2 \ / \ c^2; \quad B_{51} = -5.0 \ м^2 \ / \ c^2. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Підставляючи ці значення у формулу (10), отримаємо

$$\left.\begin{aligned} G_{10} &= -108.3 \ м^2 \ / \ c^2; \\ G_{11} &= \ -82.6 \ м^2 \ / \ c^2; \\ H_{11} &= \ \ -0.3 \ м^2 \ / \ c^2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Тоді, підставляючи вище обчислені значення у формулу (8), знайдемо

$$\Delta g_1^1 = -2.0\times10^{-5} \ м \ / \ c^2 \tag{17}$$

або

$$\Delta g_1^1 = -2.0 \ мГал. \tag{18}$$

Величина Δg_1 (див. формулу (6)) тоді буде рівна

$$\Delta g_1 = -0.01 \ мГал. \tag{19}$$

Добре відомо, що член першого степеня Δg_1 розкладу аномалії сили ваги Δg, як трансформанти збурюючого гравітаційного потенціалу, в ряд сферичних функцій вказує на зміщення системи координат (див., наприклад, роботи 4; 5; 7). Тобто, лінійний член Δg_1 спричиняє вплив на аномалію сили ваги за рахунок зміщення координатної системи.

Тепер розглянемо вплив члена другого степеня Δg_2 розкладу в ряд сферичних функцій з врахуванням його еліпсоїдальної поправки на аномалію сили ваги. Тоді формула (1) запишеться

$$\Delta g_2 = \Delta g_2^0 + e^2 \Delta g_2^1, \tag{20}$$

де

$$\Delta g_2^0 = \frac{1}{R}\left[P_{20}(\sin\phi)A_{20} + P_{21}(\sin\phi)\left(A_{21}\cos\lambda + B_{21}\sin\lambda\right) + P_{22}(\sin\phi)\left(A_{22}\cos 2\lambda + B_{22}\sin 2\lambda\right)\right]; \tag{21}$$

$$\Delta g_2^1 = \frac{1}{R}\left[P_{20}(\sin\phi)G_{20} + P_{21}(\sin\phi)\left(G_{21}\cos\lambda + H_{21}\sin\lambda\right) + P_{22}(\sin\phi)\left(G_{22}\cos 2\lambda + H_{22}\sin 2\lambda\right)\right]. \tag{22}$$

Вважаючи, що

$$\left.\begin{aligned} P_{20}(\sin\phi) &= \frac{1}{2}\left(3\sin^2\phi - 1\right); \\ P_{21}(\sin\phi) &= 3\sin\phi\cos\phi; \\ P_{22}(\sin\phi) &= 3\cos^2\phi \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

та

$$\left.\begin{aligned} &C_{20} = -1.082626\times10^{-3}; && \\ &C_{21} = 0; && S_{21} = 0; \\ &C_{22} = 1.571\times10^{-6}; && S_{22} = -9.03\times10^{-7} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

і знайшовши за формулами (14) коефіцієнти

$$\left.\begin{aligned} &A_{20} = -67734.3\ м^2/с^2; && \\ &A_{21} = 0; && B_{21} = 0; \\ &A_{22} = 98.3\ м^2/с^2; && B_{22} = -56.5\ м^2/с^2 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

для точки O з координатами $\phi_0 = 48.3°$, $\lambda_0 = 30.8°$ обчислимо нульовий член розкладу Δg_2^0. Він буде рівний

$$\Delta g_2^0 = -350\ мГал. \tag{26}$$

Із результатів (26) добре видно сильну залежність аномалії сили ваги, зокрема, від другого зонального гармонічного коефіцієнта C_{20}.

Дослідимо тепер еліпсоїдальну поправку $e^2\Delta g_2^1$. Знайдемо спочатку коефіцієнти G_{nm} та H_{nm}, що входять у формулу (22), тобто

$$\left.\begin{aligned} G_{20} &= \chi_{40}A_{20} + \lambda_{40}A_{40} + \mu_{40}A_{60}; \\ G_{21} &= \chi_{41}A_{21} + \lambda_{41}A_{41} + \mu_{41}A_{61}; \\ G_{22} &= \chi_{42}A_{22} + \lambda_{42}A_{42} + \mu_{42}A_{62}; \\ H_{21} &= \chi_{41}B_{21} + \lambda_{41}B_{41} + \mu_{41}B_{61}; \\ H_{22} &= \chi_{42}B_{22} + \lambda_{42}B_{42} + \mu_{42}B_{62}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Відповідні гармонічні коефіцієнти C_{nm} і S_{nm} мають наступні значення:

$$\left.\begin{aligned} &C_{40} = 5.39\times10^{-7}; && C_{60} = -1.48\times10^{-7}; \\ &C_{41} = -5.33\times10^{-7}; && C_{61} = -8.1\times10^{-8}; \\ &C_{42} = 3.47\times10^{-7}; && C_{62} = 5.2\times10^{-8}; \\ &S_{41} = -4.75\times10^{-7}; && S_{61} = 2.4\times10^{-8}; \\ &S_{42} = 6.64\times10^{-7}; && S_{62} = -3.75\times10^{-7}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

а значення коефіцієнтів C_{20}, C_{21}, C_{22} та S_{21}, S_{22} візьмемо з формул (24).

Тоді величини із формул (5) після обчислень будуть рівні

$$\left.\begin{aligned} &\chi_{40} = \frac{36}{70}; && \lambda_{40} = -\frac{111}{231}; && \mu_{40} = \frac{510}{286}; \\ &\chi_{41} = \frac{18}{70}; && \lambda_{41} = -\frac{129}{231}; && \mu_{41} = \frac{714}{286}; \\ &\chi_{42} = \frac{6}{70}; && \lambda_{42} = -\frac{183}{231}; && \mu_{42} = \frac{952}{286}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Скориставшись формулами (14), обчислимо коефіцієнти A_{nm} і B_{nm} з відповідними індексами, одержимо

$$\left.\begin{aligned} &A_{40} = 33.7\ м^2/с^2; && A_{60} = -9.2\ м^2/с^2; \\ &A_{41} = -33.3\ м^2/с^2; && A_{61} = -5.1\ м^2/с^2; \\ &A_{42} = 21.7\ м^2/с^2; && A_{62} = 3.2\ м^2/с^2; \\ &B_{41} = -29.7\ м^2/с^2; && B_{61} = 1.5\ м^2/с^2; \\ &B_{42} = 41.5\ м^2/с^2; && B_{62} = -23.5\ м^2/с^2, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

а значення коефіцієнтів A_{20}, A_{21}, A_{22} та B_{21}, B_{22} візьмемо з формул (25).

Підставляючи ці значення у формулу (27), отримаємо

$$\left.\begin{aligned} G_{20} &= -34867.4\ м^2/с^2; \\ G_{21} &= 5.9\ м^2/с^2; \\ G_{22} &= 1.9\ м^2/с^2; \\ H_{21} &= 20.3\ м^2/с^2; \\ H_{22} &= -115.9\ м^2/с^2. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Скориставшись формулами (22), (23) та результатами обчислень (31), для точки O з координатами $\phi_0 = 48.3°$, $\lambda_0 = 30.8°$ знайдемо числову характеристику елемента еліпсоїдальної поправки Δg_2^1. Одержимо значення

$$\Delta g_2^1 = -1.857\times10^{-3}\ м/с^2 \tag{32}$$

або

$$\Delta g_2^1 = -185.7\ мГал. \tag{33}$$

Тоді вся еліпсоїдальна поправка $e^2\Delta g_2^1$ згідно формули (20) прийме наступне значення:

$$e^2\Delta g_2^1 = -1.24\ мГал. \tag{34}$$

Із результатів обчислень (34) можна впевнено сказати: похибка для аномалій сили ваги Δg через нехтування еліпсоїдальної поправки $e^2\Delta g_2^1$ в середньому для території України дає величину ±1,24 мГал, що має такий же самий порядок точності, яка забезпечується сучасними гравіметричними супутниковими даними.

Висновки з даного дослідження та перспективи. Таким чином, на основі проведених досліджень аномалії сили ваги, можна підсумувати наступне. Аномалія сили ваги Δg практично не залежить від зміщення координатної системи. Це наочно демонструється результатами (7) та (19), тому еліпсоїдальну поправку $e^2\Delta g_1^1$ можна не враховувати при обчисленнях аномального гравітаційного поля Землі. Аномалія сили ваги досить сильно залежить від гармонік другого степеня, зокрема, від другого зонального гармонічного коефіцієнта C_{20}, а отже і від стиснення α референц-еліпсоїда. Щодо еліпсоїдальної поправки $e^2\Delta g_2^1$, то її необхідно враховувати, оскільки її значення, представлене у вигляді результатів (34), має величину такого ж самого порядку, що і сучасні високоточні гравіметричні супутникові дані.

Список літератури:

1. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия : монография / под ред. Ю.М. Неймана. Москва : Изд-во МИИГАиК, 2007. 426 с.
2. Двуліт П.Д. Фізична геодезія : навч. посібник. Київ : Експрес, 2008. 256 с.
3. Загребин Д.В. Теория регуляризированного геоида. *Труды ИТА*. 1952. № 1. С. 52–61.
4. Мещеряков Г.А., Церклевич А.Л. Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Марса : монография. Київ : Наукова думка, 1987. 240 с.
5. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. *Труды ЦНИИГАиК*. 1960. Вып. 131. С. 250–251.
6. Мориц Г. Современная физическая геодезия : монография. Москва : Недра, 1983. 392 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики : учебное пособие. Москва : Наука, 1966. 724 с.
8. Boucher C., Altamimi Z. ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters. *Journal of Geodesy*. 2001. Vol. 75. P. 613–619.
9. Lelgemann D. Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data. *Boll. Geold. Sci. Affini*. 1973. Vol. 32. P. 241–250.
10. Lemoine J., Bourgogne S., Biancal R., Reinquin F., Bruinsma S. EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD. *Model of the Earth's Gravitational Field with Time Variable Part CNES/GRGS RL04*. 2019. URL: https://grace.obs-mip.fr/variable-models-grace-lageos/mean-fields/release-04 (дата звернення: 12.08.2019).
11. Zingerle P., Brockmann J., Pail R., Gruber T., Willberg M. GO CONS GCF-2 TIM R6e. *Polar Model of Extended Gravitational Field TIM_R6*. 2019. doi: 10.5880/ICGEM.2019.005

References:

1. Hoffmann-Wellenhof B., Moritz H. (2007). Fizicheskaya geodeziya [Physical geodesy]. Moscow. (in Russian)
2. Dvulit P.D. (2008). Fizychna Heodeziia [Physical geodesy]. Kyiv. (in Ukrainian)
3. Zagrebin D.V. (1952). Teoriya regulyarizirovannogo geoida [Theory of regularized geoid]. *Trudy ITA*, no. 1, pp. 52–61.
4. Meshcheryakov G.A., TSerklevich A.L. (1987). Gravitatsionnoye pole, figura i vnutrenneye stroyeniye Marsa [Gravitational field, figure and internal structure of Mars]. Kiyev. (in Russian)
5. Molodenskiy M.S., Eremeyev V.F., YUrkina M.I. (1960). Metody izucheniya vneshnego gravitatsionnogo polya i figury Zemli [Methods for studying the external gravitational field and the figure of the Earth]. *Trudy TSNIIGAiK*, vol. 131, pp. 250–251.
6. Moritz H. (1983). Sovremennaya fizicheskaya geodeziya [Advanced physical geodesy]. Moscow. (in Russian)
7. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. (1966). Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow. (in Russian)
8. Boucher C., Altamimi Z. (2001). ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters. *Journal of Geodesy*, vol. 75, pp. 613–619.
9. Lelgemann D. (1973). Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data. *Boll. Geold. Sci. Affini*, vol. 32, pp. 241–250.
10. Lemoine J., Bourgogne S., Biancal R., Reinquin F., Bruinsma S. (2019). EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD. *Model of the Earth's Gravitational Field with Time Variable Part CNES/GRGS RL04*. Available at: https://grace.obs-mip.fr/variable-models-grace-lageos/mean-fields/release-04 (accessed 12 August 2019).
11. Zingerle P., Brockmann J., Pail R., Gruber T., Willberg M. (2019). GO CONS GCF-2 TIM R6e. *Polar Model of Extended Gravitational Field TIM_R6*. doi: 10.5880/ICGEM.2019.005