ТЕХНІЧНІ НАУКИ

DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-1-77-27
УДК 528.242

Согор А.Р., Согор М.А.
Національний університет «Львівська політехніка»

ПРО ВПЛИВ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПОПРАВОК НА ВИЗНАЧЕННЯ ВИСОТ ГЕОЇДА

Анотація. В даній роботі отримані значення еліпсоїдальних поправок при обчисленні висот геоїда як однієї зі складових збурюючого потенціалу Землі. Із результатів обчислень встановлено: для того, щоби одержати більш точніші результати обчислень, які будуть співрозмірні з даними сучасних супутникових вимірювань, потрібно враховувати еліпсоїдальні поправки до компонентів аномального гравітаційного поля Землі. Оскільки існує сильна залежність висоти геоїда від зміщення референцної системи, то еліпсоїдальну поправку $e^2N_1^1$ необхідно враховувати при обчисленнях аномального гравітаційного поля Землі. Рекомендується для визначення висот геоїда N також включати еліпсоїдальні поправки $e^2N_2^1$ та $e^2N_3^1$ у розклад в ряд за сферичними функціями, оскільки нехтування лише останньої поправки в середньому для території України дає похибку порядку точності сучасних альтиметро-гравіметричних обчислень аномального гравітаційного поля Землі.

Ключові слова: альтиметро-гравіметричні обчислення, аномалія сили ваги, аномальне гравітаційне поле, висота геоїда, гравіметричні супутникові дані, еліпсоїдальна поправка, сферичні функції, загальноземна геоцентрична система (WGS 84), європейська регіональна геодезична система (European 1950).

Sohor Andrii, Sohor Markiian
Lviv Polytechnic National University

ON THE INFLUENCE OF ELLIPSOIDAL CORRECTIONS ON THE DETERMINATION OF HEIGHTS OF GEOID

Summary. Many geodetic tasks cannot be rigorously solved without taking gravimetric data into account. For example, the measured elements of the earth's surface (angles, directions, distances) must be projected onto some correct surface (plane, sphere, or ellipsoid) for their further processing. Such design shall be performed taking into account the gravity deflection, gravity anomalies and gravity heights. Another example of the need to use gravimetric data in geodesy is to obtain heights of points that cannot be determined strictly without knowledge of gravity. To determine the anomalies of gravity in gravimetry, you need to know the height of the geoid. As the anomalies of the gravity and height of the geoid as elements of the disturbing potential are small in magnitude compared to the size of the Earth, so in the formulas that bind them, they apply a spherical approximation, neglecting the compression of the reference ellipsoid. The problem of studying the external gravitational field of the Earth is to study first the figures of the Earth, and such a task is largely given to the theory of the potential of gravity of the Earth. When studying the shape of the Earth by gravitational field, the method of decomposition of the potential in a row by spherical functions is properly used. The same method of image potential proved to be quite convenient for studying the shape and gravitational field of the Earth by the perturbations in motion of artificial satellites of the Earth. This method makes it possible to represent the gravitational field, which is given on a spherical Earth, as the sum of harmonics, and the higher the harmonic order number, the smaller the wavelength. Specifying the coefficients of such a trigonometric series is quite convenient for all kinds of calculations. Ellipsoidal corrections to the components of the Earth's anomalous gravitational field must be taken into account in order to obtain more accurate computational results commensurate with current satellite measurements (for example, those obtained with Global Navigation Satellite Systems). In this paper, the values of ellipsoidal corrections are obtained when calculating the heights of a geoid as one of the constituents of the Earth's perturbation potential. From the results of calculations it is established that in order to obtain more accurate results of calculations that will be commensurate with the data of modern satellite measurements, ellipsoidal corrections to the components of the Earth's anomalous gravitational field must be taken into account. Since there is a strong dependence of the height of the geoid on the displacement of the reference system, the ellipsoidal correction $e^2N_1^1$ must be taken into account when calculating the anomalous gravitational field of the Earth. It is recommended to include ellipsoidal corrections $e^2N_2^1$ and $e^2N_3^1$ in a series of spherical functions for determining the heights of geoid N, since neglecting only the last amendment on the average for the territory of Ukraine gives an error in the accuracy of modern altimetry-gravimetric calculations of the anomalous gravitational field of the Earth.

Keywords: altimeter-gravimetric calculations, anomaly of gravity, anomalous gravity field, height of geoid, gravimetric satellite data, ellipsoidal correction, spherical functions, World Geocentric System (WGS 84), European Regional Geodetic System (European 1950).

Постановка проблеми. Строгий розв'язок багатьох геодезичних задач неможливий без врахування гравіметричних даних. Так, наприклад, виміряні елементи земної поверхні (кути, напрямки, відстані) для їх наступного опрацювання необхідно спроектувати на деяку правильну поверхню (площину, сферу або еліпсоїд). Таке проектування має виконуватись із врахуванням відхилення важка, аномалій сили ваги та висот геоїда, які дає гравіметрія. Другим прикладом необхідності використання гравіметричних даних в геодезії є отримання висот точок, які строго не можуть бути визначені без знання сили ваги. Для визначення аномалий сили ваги в гравіметрії необхідно знати висоти геоїда. Оскільки аномалії сили ваги та висоти геоїда як елементи збурюючого потенціалу є малі величини у порівнянні з розмірами Землі, тому в формулах, що пов'язують їх, застосовують сферичну апроксимацію, нехтуючи стисненням референц-еліпсоїда.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема вивчення зовнішнього гравітаційного поля Землі полягає у дослідженні в першу чергу фігури Землі і така задача в значній мірі приділяється теорії потенціалу сили ваги Землі.

При дослідженні фігури Землі за гравітаційним полем належним чином використовується метод розкладу потенціалу в ряд за сферичними функціями. Цей же метод зображення потенціалу виявився досить зручним і для вивчення фігури та гравітаційного поля Землі за збуреннями в русі штучних супутників Землі [5; 10; 11].

Цей метод дає можливість зобразити гравітаційне поле, яке є заданим на сферичній Землі, у вигляді суми гармонік, причому чим вищий порядковий номер гармоніки, тим менша довжина її хвилі. Задання коефіцієнтів такого тригонометричного ряду є досить зручним для різного роду обчислень.

Питаннями робіт по визначенню форми та розмірів Землі методом розкладу потенціалу в ряд за сферичними функціями детально займалися Г. Моріц [4], Д. Загребін [3], П. Двуліт [2], Ю. Нейман, Б. Гофман-Велленгоф [1], В. Гейсканен [8], Д. Лельгеман [9].

Сферична апроксимація і надалі застосовується у фізичній геодезії, хоча для одержання більш точних результатів обчислень цього не достатньо, оскільки сучасні гравіметричні та альтиметричні супутникові вимірювання дають на порядок точніші результати [12].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Для того, щоби одержати більш точніші результати обчислень, які будуть співрозмірні з даними сучасних супутникових вимірювань (наприклад, одержаних за допомогою Глобальних Навігаційних Супутникових Систем), потрібно враховувати еліпсоїдальні поправки до компонентів аномального гравітаційного поля Землі.

Постановка завдання. Отримати значення еліпсоїдальних поправок при обчисленні висот геоїда як однієї зі складових збурюючого потенціалу Землі. Довести або спростувати доцільність врахування даних еліпсоїдальних поправок при обчисленні висот геоїда N методом порівняння їх результатів із точністю, яка забезпечується сучасними високоточними альтиметро-гравіметричними обчисленнями аномального гравітаційного поля Землі [12].

Виклад основного матеріалу. Висоту геоїда N запишемо у вигляді, представленому Моріцом в роботі [4], а саме

$$N = N^0 + e^2 N^1, \tag{1}$$

де N^0 – нульовий член розкладу, який можна одержати зі сферичної апроксимації; $e^2 N^1$ – так звана еліпсоїдальна поправка або член розкладу, що характеризує відхилення референц-еліпсоїда від сфери.

Величину N^0 можна обчислити із розкладу в ряд за сферичними функціями [6; 7]

$$N^0 = \frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\sin\phi), \tag{2}$$

де γ – нормальне значення сили ваги. Тоді еліпсоїдальний елемент розкладу N^1 може бути пов'язаний із N^0 наступним чином [4]

$$N^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sin^2\phi\right)N^0. \tag{3}$$

Знайдемо спочатку перший елемент розкладу ряду (2). Тобто при $n = 1$ отримаємо

$$N_1^0 = \frac{1}{\gamma}\left[A_{10}P_{10}(\sin\phi) + \left(A_{11}\cos\lambda + B_{11}\sin\lambda\right)P_{11}(\sin\phi)\right]. \tag{4}$$

Коефіцієнти A_{10}, A_{11} і B_{11} пов'язані з відповідними їм коефіцієнтами C_{10}, C_{11} та S_{11} такими формулами [8; 12]:

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{fM}{R}C_{nm}\,; \\ B_{nm} &= \frac{fM}{R}S_{nm}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Відомо, що коефіцієнти $C10$, C_{11} та S_{11} є пов'язані з прямокутними координатами $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ зміщення системи координат такими формулами [8]:

$$\left.\begin{aligned} C_{10} &= -\frac{\Delta z}{R}\,; \\ C_{11} &= -\frac{\Delta x}{R}\,; \\ S_{11} &= -\frac{\Delta y}{R}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Якщо підставити формули (6) у (5), отримаємо

$$\left.\begin{aligned} A_{10} &= -\frac{fM}{R^2}\Delta z\,; \\ A_{11} &= -\frac{fM}{R^2}\Delta x\,; \\ B_{11} &= -\frac{fM}{R^2}\Delta y\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Використовуючи замість $P_{10}(\sin\phi)$ і $P_{11}(\sin\phi)$ їх значення [12]

$$\left.\begin{aligned} P_{10}(\sin\phi) &= \sin\phi\,; \\ P_{11}(\sin\phi) &= \cos\phi\,, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

враховуючи формулу (7) та прийнявши $\frac{fM}{R^2} = \gamma$, величина N_1^0 буде мати вигляд

$$N_1^0 = \Delta z\sin\phi + \Delta x\cos\lambda\cos\phi + \Delta y\sin\lambda\cos\phi\,. \tag{9}$$

Із формули (9) можна зауважити залежність висот геоїда від прямокутних координат зміщення системи. Щоби прослідити числову характеристику N_1^0, задамося початковими прямокутними координатами зміщення параметрів регіональної геодезичної системи (наприклад, добре відомої європейської регіональної геодезичної системи European 1950) в загальноземній геоцентричній системі WGS 84 [6; 7]

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= 251 \ \ м\,; \\ \Delta\alpha &= 0.14192702\times10^{-4}\,; \\ \Delta x &= -87 \ \ м\,; \\ \Delta y &= -98 \ \ м\,; \\ \Delta z &= -121 \ \ м\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Маючи відповідні координати зміщення $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, можна знайти числову характеристику сферичної апроксимації N_1^0. Для цього необхідно вибрати якусь точку O зі сферичними координатами ϕ, λ. Досить доречно за точку $O(\phi, \lambda)$ вибрати центр сфероїдальної трапеції, в яку вписується територія України, оскільки така точка буде розміщена поблизу географічного центру України з координатами: $\phi_0 = 48.3°$, $\lambda_0 = 30.8°$.

Остаточно одержимо

$$N_1^0 = 173.4\ м. \tag{11}$$

Обчислимо тепер ще елемент еліпсоїдальної поправки N_1^1. Згідно формули (3) для вище описаної точки $O(\phi_0, \lambda_0)$ цю величину можна записати наступним чином:

$$N_1^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sin^2\phi_0\right)N_1^0. \tag{12}$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$N_1^1 = -29.1\ м. \tag{13}$$

Тоді вся еліпсоїдальна поправка $e^2 N_1^1$ буде рівна

$$e^2 N_1^1 = -0.19\ м. \tag{14}$$

Дослідимо тепер елемент другого степеня розкладу висоти геоїда N^0 в ряд сферичних функцій, тобто при $n = 2$ ряд (2) запишеться

$$N_2^0 = \frac{1}{\gamma}\Big[A_{20}P_{20}(\sin\phi) + (A_{21}\cos\lambda + B_{21}\sin\lambda)P_{21}(\sin\phi) + \\ + (A_{22}\cos 2\lambda + B_{22}\sin 2\lambda)P_{22}(\sin\phi)\Big]. \tag{15}$$

Вважаючи, що [12]

$$\left.\begin{aligned} &P_{20}(\sin\phi) = \frac{1}{2}\left(3\sin^2\phi - 1\right); \\ &P_{21}(\sin\phi) = 3\sin\phi\cos\phi; \\ &P_{22}(\sin\phi) = 3\cos^2\phi \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

та

$$\left.\begin{aligned} &C_{20} = -1.082626\times10^{-3}; && \\ &C_{21} = 0; && S_{21} = 0; \\ &C_{22} = 1.571\times10^{-6}; && S_{22} = -9.03\times10^{-7} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

і знайшовши за формулами (5) коефіцієнти [12]

$$\left.\begin{aligned} &A_{20} = -67734.3\ м^2/с^2; && \\ &A_{21} = 0; && B_{21} = 0; \\ &A_{22} = 98.3\ м^2/с^2; && B_{22} = -56.5\ м^2/с^2, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

для точки O з координатами $\phi_0 = 48.3°$, $\lambda_0 = 30.8°$ нульовий елемент розкладу N_2^0 буде рівний

$$N_2^0 = -2324.1\ м. \tag{19}$$

Із результатів (19) добре видно сильну залежність висоти геоїда, зокрема, від другого зонального гармонічного коефіцієнта C_{20}.

Дослідимо тепер еліпсоїдальну поправку $e^2 N_2^1$. Застосовуючи формулу (3) для вище описаної точки $O(\phi_0, \lambda_0)$, запишемо спочатку величину N_2^1. Тобто

$$N_2^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sin^2\phi_0\right)N_2^0. \tag{20}$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$N_2^1 = 390.7\ м. \tag{21}$$

Тоді вся еліпсоїдальна поправка $e^2 N_2^1$ буде рівна

$$e^2 N_2^1 = 2.6\ м. \tag{22}$$

Оскільки результати обчислень (22) нам вказують на досить велику за абсолютною величиною еліпсоїдальну поправку $e^2 N_2^1$, доцільно виконати ще наступні дослідження. Знайдемо тепер ще елемент третього степеня розкладу висоти геоїда N^0 в ряд сферичних функцій, тобто при $n = 3$ ряд (2) запишеться

$$N_3^0 = \frac{1}{\gamma}\left[\begin{aligned} &A_{30}P_{30}(\sin\phi) + (A_{31}\cos\lambda + B_{31}\sin\lambda)P_{31}(\sin\phi) + \\ &+ (A_{32}\cos 2\lambda + B_{32}\sin 2\lambda)P_{32}(\sin\phi) + (A_{33}\cos 3\lambda + B_{33}\sin 3\lambda)P_{33}(\sin\phi) \end{aligned}\right]. \tag{23}$$

Вважаючи, що

$$\left.\begin{aligned} &P_{30}(\sin\phi) = \frac{1}{2}\left(5\sin^3\phi - 3\sin\phi\right); \\ &P_{31}(\sin\phi) = -\frac{3}{2}\left(5\sin^2\phi - 1\right)\left(1 - \sin^2\phi\right)^{1/2}; \\ &P_{32}(\sin\phi) = 15\left(1 - \sin^2\phi\right)\sin\phi; \\ &P_{33}(\sin\phi) = -15\left(1 - \sin^2\phi\right)^{3/2} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

та

$$\left.\begin{aligned} &C_{30} = 2.535\times10^{-6}; && \\ &C_{31} = 2.192\times10^{-6}; && S_{31} = 2.72\times10^{-7}; \\ &C_{32} = 8.93\times10^{-7}; && S_{32} = -6.23\times10^{-7}; \\ &C_{33} = 7.00\times10^{-7}; && S_{33} = 1.412\times10^{-6} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

і знайшовши за формулами (5) коефіцієнти

$$\left.\begin{aligned} &A_{30} = 158.6\ м^2/с^2; && \\ &A_{31} = 137.1\ м^2/с^2; && B_{31} = 17.0\ м^2/с^2; \\ &A_{32} = 55.9\ м^2/с^2; && B_{32} = -39.0\ м^2/с^2; \\ &A_{33} = 43.8\ м^2/с^2; && B_{33} = 88.3\ м^2/с^2, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

для точки O з координатами $\phi_0 = 48.3°$, $\lambda_0 = 30.8°$ нульовий елемент розкладу N_3^0 буде рівний

$$N_3^0 = -67.0\ м. \tag{27}$$

Дослідимо тепер еліпсоїдальну поправку $e^2 N_3^1$. Застосовуючи формулу (3) для вище описаної точки $O(\phi_0, \lambda_0)$, запишемо спочатку величину N_3^1. Тобто

$$N_3^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sin^2\phi_0\right)N_3^0. \tag{28}$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$N_3^1 = 11.3\ м. \tag{29}$$

Тоді вся еліпсоїдальна поправка $e^2 N_3^1$ буде рівна

$$e^2 N_3^1 = 0.076\ м = 7.6\ см. \tag{30}$$

Із результатів обчислень (30) можна впевнено сказати: похибка для висот геоїда N через нехтування еліпсоїдальної поправки $e^2 N_3^1$ в середньому для території України дає величину ± 7,6 см, що має такий же самий порядок точності, яка забезпечується сучасними альтиметро-гравіметричними обчисленнями аномального гравітаційного поля Землі.

Висновки з даного дослідження та перспективи. Таким чином, досліджуючи висоту геоїда *N*, можна підсумувати наступне. Існує сильна залежність висоти геоїда від зміщення референцної системи, яка показана результатами в сферичній апроксимації (11). Щодо еліпсоїдальних поправок $e^2N_1^1$, $e^2N_2^1$ та $e^2N_3^1$ то їх необхідно також враховувати, оскільки їх значення, представлені відповідно у вигляді результатів (14), (22) та (30), мають величини такого ж самого порядку, що і сучасні високоточні альтиметро-гравіметричні обчислення аномального гравітаційного поля Землі.

Список літератури:

1. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия: Пер. с англ. Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиповой / Под ред. Ю.М. Неймана. Москва : Изд-во МИИГАиК, 2007. 426 с.
2. Двуліт П.Д. Фізична геодезія. Київ : Експрес, 2008. 256 с.
3. Загребин Д.В. Теория регуляризированного геоида. Тр. ИТА. 1952. № 1. С. 52–61.
4. Мориц Г. Современная физическая геодезия. Пер. с англ. Москва : Недра, 1983. 392 с.
5. Boucher C., Altamimi Z. ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters. *Journal of Geodesy* 2001. V. 75. P. 613–619.
6. DMA Technical Report: Part I – Methods, Techniques and Data Used in WGS84 Development, (DMA TR 8350.2-A), Headquarters Defense Mapping Agency, Washington, DC, December, 1987. P. 194.
7. DMA Technical Report: Part II – Parameters, Formulas and Graphics for the Practical Application of WGS84, (DMA TR 8350.2-B), Headquarters Defense Mapping Agency, Washington, DC, December, 1987. P. 302.
8. Heiskanen W. and Moritz H. Physical Geodesy. W.H. Freeman and Company. San Francisco, California, 1967. P. 402.
9. Lelgemann D. Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data. Boll. Geold. Sci. Affini. 1973. V. 32. P. 241–250.
10. Lemoine J., Bourgogne S., Biancal R., Reinquin F., Bruinsma S. EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD – Model of the Earth's Gravitational Field with Time Variable Part CNES/GRGS RL04, 2019.
11. Zingerle P., Brockmann J., Pail R., Gruber T., Willberg M. Polar Model of Extended Gravitational Field TIM_R6. 2019. doi: 10.5880/ICGEM.2019.005
12. Согор А.Р., Согор М.А. Про вплив еліпсоїдальних поправок на визначення аномалій сили ваги. *Молодий вчений*. 2019. № 8(72). С. 153–156.

References:

1. Hoffmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2007). *Fizicheskaya geodeziya* [Physical geodesy]. Moscow. (in Russian)
2. Dvulit, P.D. (2008). *Fizychna Heodeziia* [Physical geodesy]. Kyiv. (in Ukrainian)
3. Zagrebin, D.V. (1952). Teoriya regulyarizirovannogo geoida [Theory of regularized geoid]. *Trudy ITA*, no. 1, pp. 52–61.
4. Moritz, H. (1983). *Sovremennaya fizicheskaya geodeziya* [Advanced physical geodesy]. Moscow. (in Russian)
5. Boucher, C., & Altamimi, Z. (2001). ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters. *Journal of Geodesy*, vol. 75, pp. 613–619.
6. DMA Technical Report: Part I (1983). Methods, Techniques and Data Used in WGS84 Development, (DMA TR 8350.2-A), Headquarters Defense Mapping Agency.
7. DMA Technical Report: Part II (1987). Parameters, Formulas and Graphics for the Practical Application of WGS84, (DMA TR 8350.2-B), Headquarters Defense Mapping Agency.
8. Heiskanen, W. and Moritz, H. (1967). Physical Geodesy. W.H. Freeman and Company. San Francisco, California.
9. Lelgemann, D. (1973). Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data. *Boll. Geold. Sci. Affini*, vol. 32, pp. 241–250.
10. Lemoine, J., Bourgogne, S., Biancal, R., Reinquin, F., & Bruinsma, S. (2019). EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD. *Model of the Earth's Gravitational Field with Time Variable Part CNES/GRGS RL04*. Available at: https://grace.obs-mip.fr/variable-models-grace-lageos/mean-fields/release-04 (accessed 12 August 2019).
11. Zingerle, P., Brockmann, J., Pail, R., Gruber, T., & Willberg, M. (2019). GO CONS GCF-2 TIM R6e. *Polar Model of Extended Gravitational Field TIM_R6*. doi: 10.5880/ICGEM.2019.005
12. Sohor, A.R., & Sohor, M.A. (2019). Pro vplyv elipsoidalnykh popravok na vyznachennia anomalii syly vahy [On the influence of ellipsoidal corrections on the determination of anomalies of gravity]. *Molodyi vchenyi*, no. 8(72), pp. 153–156.