ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-2-78-46
УДК 32.019.5; 519.83:519.2+004.9+004.056

Селезньова Н.П., Сараєва Ю.О.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОЦІНОК ВПЛИВУ ПОЛІТИЧНИХ ПАРТІЙ НА ПРИКЛАДІ ВИБОРІВ В УКРАЇНІ 2019 РОКУ

Анотація. Робота присвячена оцінці та аналізу розподілу впливу політичних партій у парламенті на прийняття рішень на прикладі дострокових парламентських виборів у 2019 році в Україні. Новим напрямком застосування математичних методів до задач прийняття рішень, зокрема в політичній діяльності парламентських партій, є емпіричні дослідження електоральних настроїв в період передвиборчої кампанії. Такі дослідження ґрунтуються на статистичних та ігрових математичних моделях. атематична модель, розглянута в роботі, базується на теорії кооперативних ігор. Для діючих п'яти партій описано коаліції, які зможуть приймати конституційні рішення, обчислено показники «сили» – індекси Шеплі-Шубіка, Банзафа, Пенроуза. Ці індекси співставлено з множинними коефіцієнтами кореляції між відповідними партіями. Числові дані для роботи було отримано шляхом анкетування виборців та взято із офіційного сайту виборчої комісії.

Ключові слова: індекс впливу Шеплі-Шубіка, індекс впливу Банзафа, індекс впливу Пенроуза, множинний коефіцієнт кореляції, кооперативна гра.

Seleznova Nadiia, Saraeva Julia
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

MATHEMATICAL MODELING OF ESTIMATES OF POLITICAL PARTIES' INFLUENCE ON THE EXAMPLE OF ELECTIONS IN UKRAINE IN 2019

Summary. The article is devoted to the evaluation and analysis of the distribution of political parties' influence in parliament on the adoption of administrative decisions on the example of the pre-term parliamentary elections in 2019 in Ukraine. A new direction of applying mathematical methods to the tasks of administrative decision-making, particularly in the political activity of parliamentary parties, is empirical research of electoral attitudes during the election campaign. Such studies are based on statistical and game mathematical models. The mathematical model considered in the article is based on the game approach, which is based on the theory of cooperative games. Cooperative games are games in which players are able to unite in coalitions, acting together rather than independently, and thus not preventing each other from contributing to victory. Since this is how parliamentarians should act in order to adopt a decision (unless there is a large enough party capable of adopting a decision without taking into account the opinions of other parties, which is a very rare and obviously unwelcome case), applying the cooperative game model to their performance looks promising enough. For the current five parliamentary parties, all theoretically possible coalitions that will be able to adopt constitutional decisions are described. According to the law of Ukraine, in order to take a constitutional decision, it is necessary to collect at least 300 votes. Assuming that the whole party votes equally, we calculate those combinations of parties that in principle have a sufficient number of votes. The formal and structural indices of "power" are calculated – Shapley-Shubik, Banzhaf, Penrose indices for each party. These indices are compared with multiple correlation coefficients between the respective parties, which help us estimate how acceptable this coalition is from the perspective of voters, and therefore to estimate the possible loss of electorate by these parties if they choose to join the coalition. Numerical data for the work were obtained through voter questionnaires and taken from the official website of the election commission.

Keywords: Shapley-Shubik influence index, Banzhaf influence index, Penrose influence index, multiple correlation coefficient, cooperative game.

Постановка проблеми. Одна політична партія у парламенті як правило не може самостійно прийняти той чи інший закон. Потрібно утворювати коаліції з іншими партіями. Постає питання: з якими саме, та на яких умовах це буде найефективнішим, які коаліції будуть стійкими та зможуть досягти мети.

Для відповіді на таке питання застосовують моделювання політичних процесів та різноманітний аналіз таких моделей. У цій роботі аналіз виконано за допомогою теорії кооперативних ігор та кореляційного аналізу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теорія ігор, як окремий розділ математики, вперше була систематично викладена Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном в монографії [1], хоча окремі результати були опубліковані ще в 20-х роках 20-го ст. Ця монографія містила переважно економічні приклади і розглядала теорію ігор як загальну математичну теорію конфліктів.

Під час другої світової війни і одразу після неї теорією ігор зацікавились військові, які одразу розгледіли в ній математичний апарат для дослідження стратегічних проблем і підготовки рішень. В радянській математичній науці фундаментальною працею з теорії гри вважають роботу Н.Н. Воробйова [2].

Основоположником теорії кооперативних ігор вважається Ллойд Шеплі, лауреат Нобелівської премії з економіки 2012 року. Ще в 1954 році Шеплі і Шубік ввели поняття індексу, який дозволяє оцінювати вплив учасників у прийняті колективних рішень. Індекс Шеплі-Шубіка був запропонований як частинний випадок вектору Шеплі, і був призначений вимірювати потенціал учасника перетворювати програшну коаліцію в переможну [3].

На даний час за результати з теорії ігор було призначено шість нобелівських премій з економіки [4].

В українській політології застосуванням математичного апарату теорії ігор, зокрема кооперативних, займається школа проф. В. Корнієнка [5].

За останні роки ряд визначних дослідників в галузі теорії ігор були нагороджені Нобелевською премією в економіці: Джон Харсаній, Джон Неш-молодший і Рейнхард Зельтен (1994) «за фундаментальний аналіз рівноваги у теорії некооперативний ігор», Фінн Кюдланд і Эдвард Прескотт (2004) «за те, що поглибили наше розуміння конфлікту та співпраці шляхом теоретико-ігрового аналізу», Роберт Ауман і Томас Шеллінг (2005) «за створення основ теорії конструювання оптимальних механізмів» [6].

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. За законом України для прийняття конституційного рішення потрібно зібрати не менше 300 голосів депутатів парламенту. У парламенті 2019 року обрання нема жодної партії з такою кількістю голосів, тому діючі п'ять партій повинні об'єднуватись у коаліції.

Для аналізу таких коаліцій доцільно застосувати теорію ігор, зокрема, обчислити формально-структурні показники «сили» – індекси Шеплі-Шубіка, Банзафа, Пенроуза. Ці індекси співставити із множинними коефіцієнтами кореляції між партіями, таким чином поєднуючи кореляційний аналіз з теорією кооперативних ігор.

Мета статті. Метою роботи є демонстрація побудови та дослідження ігрової та кореляційної моделей формування коаліцій на прикладі українського парламенту, обраного в 2019 році.

Необхідні поняття з теорії ігор.

Теорія ігор – це розділ математики, що моделює різні ігри з метою дослідження поведінки гравців та побудови оптимальних правил поведінки для них.

Гра – деякий процес, в якому беруть участь два чи більше учасників (*гравців*), що ведуть боротьбу за реалізацію своїх інтересів. Будь-яка гра характеризується системою правил, що визначає кількість учасників гри, їх можливі дії та розподіл виграшів в залежності від їх поведінки та наслідків дій.

Набір правил, які однозначно вказують гравцю, який вибір він має зробити при кожному ході в процесі гри у залежності від ситуації, яка утворилась в результаті проведення гри, називається *стратегією*.

Якщо декілька гравців мають однакові інтереси та можуть домовитись між собою, щоб діяти спільно – вони утворюють *коаліцію*. Гра, в якій така поведінка дозволена та має сенс, називається *коаліційною*. Коаліційні ігри, в яких коаліції наперед не визначені та можуть переформовуватись у процесі гри називають *кооперативними*. В теорії кооперативних ігор визначаються правила об'єднання гравців у коаліції, виходу із них, їх стійкості. Правило поділу виграшу в результаті гри називають *розв'язком гри*. В кооперативних іграх може бути декілька розв'язків, в залежності від прийнятого поняття справедливості.

Модель кооперативної гри

Позначимо через N множину всіх гравців: $N = \{1, 2, ..., n\}$, а через K – будь-яку її підмножину. Якщо гравці підмножини K домовилися між собою про спільні дії, то кажуть, що вони утворили коаліцію (вважаємо що будь-яка підмножина гравців може домови-тись).

Кількість коаліцій, які складаються із r гравців, дорівнює числу поєднань з n по r, тобто $C_n^r = \dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}$, а число всіх можливих коаліцій дорівнює $\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1$. З цієї формули видно, що число всіх можливих коаліцій значно зростає в залежності від числа гравців у грі. Для дослідження кооперативних ігор необхідно враховувати всі можливі коаліції, тому складність досліджень зростає зі збільшенням n.

Функція v, яка ставить у відповідність кожній коаліції K її перемогу $v(K)$, називається *характеристичною функцією гри*. Тобто, інакше кажучи, $v(K)$ – *виграш коаліції* K. В залежності від суті гри виграш коаліції може вимірюватись, наприклад, як певна грошова сума. В грі, яка виникає при парламентських голосуваннях, виграш вимірюється кількістю голосів «за» (або «проти») при прийнятті певного рішення. *Результатом в кооперативній грі* є поділ виграшу, що виникає не як наслідок дій гравців, а формується як результат їх домовленостей. Тому в кооперативних іграх порівнюють не ситуації, як це має місце в безкоаліційних іграх, а поділи виграшів, і порівняння це носить більш складний характер.

Пара $\{N, v\}$, що складається з множини гравців – N та характеристичної функції – v, яка ставить у відповідність кожній підмножині $K \subset N$ невід'ємне число $v(K)$, причому $v(\varnothing) = 0$, називається *кооперативної грою* (фактично, є моделлю кооперативної гри). Зауважимо, що $v(\varnothing) = 0$ – коаліція, яка не містить жодного гравця, відповідно, нічо-го не виграє.

Гравець i називається *ключовим* в коаліції S, якщо S виграшна, а $S \setminus \{i\}$ – програшна ($i \in S$). Виграшна коаліція в парламенті це та коаліція, яка має кількість голосів, що забезпечить їй прийняття парламентом потрібного рішення мінімальною кількістю голосів.

Голосуванням з квотою називається важливий окремий випадок простих ігор, під який підпадає більшість реальних схем голосування. Нехай $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множина гравців. *Голосуванням з квотою* називається упорядкований набір з $n+1$ невід'ємного числа, перше з яких q називається квотою, а решта $(w_1, ..., w_n)$ – числом голосів або вагою відповідного гравця (гравцем може бути як окрема людина, так і партія або коаліція). Голосування з квотою коротко записується як $(q; w_1, ..., w_n)$. Наприклад, квотою в парламенті є поріг – мінімальна кількість голосів які необхідно набрати при голосуванні, щоб певне рішення було прийнятим.

Числом голосів (або вагою) коаліції називається сума голосів гравців що входять до неї: $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Коаліція є виграшною, якщо її вага є не меншою за квоту,

$$v(S) = 1 \Leftrightarrow (\sum_{i \in S} w_i) \geq q \qquad (1)$$

та програшною у протилежному випадку.

Простими іграми називають окремий вид кооперативних ігор, в яких всі виплати дорівнюють 1 або 0. Тобто коаліції або виграють, або програють. Проста гра називається правильною, якщо $v(A) = 1 - v(N \setminus A)$. Це означає, що коаліція виграє тоді і тільки тоді, коли опозиція програє.

Перейдемо до питання визначення і знаходження розв'язку кооперативних ігор. Як відомо [7], розв'язок шукають за допомогою розширення класу поділів. І це розширення полягає у тому, що розв'язком гри має бути не один поділ, а деяка – їх множина. Завдяки цьому принципи оптимальності в кооперативних іграх є досить різноманітними і складними.

Розв'язки кооперативних ігор вказують, який виграш отримає кожен гра-вець. Але, не завжди можна знайти єдиний розв'язок, більш того, його взагалі може не існувати.

Досить гарними розв'язками стануть індекси впливу, які допоможуть з'ясувати, який вплив має кожен гравець у прийнятті рішення. Такий розв'язок зручно представити у вигляді вектору, в якому на i-тому місці буде вказано вплив i-ого гравця.

Найбільш відомий розв'язок – це розв'язок Шеплі, або вектор Шеплі [8].

Для вивчення поділу виграшу коаліції поставимо у відповідність кожній кооперативній грі вектор $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), ..., \varphi_n(v))$. Його компоненти будемо вважати виграшем гравців.

В переважній більшості джерел його визначають так: нехай гравці по черзі входять (порядок черги сформовано навмання) до кімнати. Кожен гравець отримує стільки, скільки він додає до виграшу у вже сформованій коаліції (тобто коаліції тих гравців що вже знаходяться в кімнаті). При рівноімовірному впорядкуванні гравців середнім виграшем гравця i є відповідна координата вектору Шеплі. Тобто отриманий розподіл виграшів осереднюється за всіма можливими порядками входу до кімнати. Формальний запис розподілу виграшу такий: позначимо вектор Шеплі як $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, де кожна координата відповідає виграшу, який отримує кожен гравець, що бере участь у грі. Координата вектору Шеплі обчислюється за формулою:

$$\varphi_i = \sum_{S \subseteq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]. \qquad (2)$$

Коефіцієнт $(n-s)!(s-1)!$ в чисельнику виникає, оскільки існує $(s-1)!$ способів зібрати в кімнаті коаліцію $S \setminus \{i\}$, потім входить гравець i (та отримує виграш $v(S) - v(S \setminus \{i\})$), а $n-s$ гравців що залишилися можуть увійти до кімнати $(n-s)!$ способами; $n!$ в знаменнику – результат усереднення за всіма перестановками гравців. Існує і аксіоматичний спосіб означення вектора Шеплі [7].

Індексом впливу для голосування з квотою називається індекс впливу відповідної простої гри, i-та компонента вектору $\varphi(v)$ інтерпретується як вплив гравця i в простій грі $\{N, v\}$.

Всі відомі індекси впливу, тобто кількісні оцінки впливу, наприклад, вплив партії в парламенті на прийняття рішення залежать саме від числа коаліцій, в яких цей гравець (наприклад, партія) ключовий. Традиційно вплив вимірюється у відсотках, а це передбачає, що сума впливів всіх гравців дорівнює 1 (або 100%). Ця властивість виконується для всіх індексів впливу, окрім індексу Пенроуза (міра Банзафа).

Індекс Шеплі-Шубіка (SS) [9] – це вектор Шеплі, область визначення якого звужена до множини простих ігор. Індекс Шеплі-Шубіка гравця i в грі $\{N, v\}$ позначається як SS_i. Індекс впливу Шеплі-Шубіка залежить від кількості коаліцій та їх розміру та обчислюється за формулою:

$$SS_i = \sum_{S \subseteq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})], \qquad (3)$$

де n – кількість партій, s – кількість партій у коаліції S. Якщо S – переможна коаліція, то $[v(S) - v(S \setminus \{i\})] = 1$, інакше – 0. Тобто підсумовування відбувається тільки за коаліціями, в яких гравець є ключовим, в цьому і полягає головна відмінність індексу Шеплі-Шубіка від вектору Шеплі. Чим більшого значення набуває індекс, тим сильнішим є вплив певного гравця на прийняття рішення. Диктатор має значення індексу Шеплі-Шубіка рівним 1, а гравець, який не є ключовим в жодній переможній коаліції, – має значення цього індексу рівним 0. Отже, формули (2) та (3) відрізняються значенням множника $v(S) - v(S \setminus \{i\})$.

В основі індексів впливу **Банзафа** та **Пенроуза** лежить наступне припу-щення: якщо вплив гравця залежить тільки від того, в яких коаліціях він є ключовим, то вважатимемо, що всі ці коаліції рівносильні і вплив гравця просто пропорційний числу таких коаліцій.

Мірою впливу Пенроуза або мірою впливу Банзафа (P) (ще називають нормованим індексом Банзафа) називається відношення кількості коаліцій b_i, у яких цей гравець є ключовим, до кількості всіх можливих коаліцій за участю гравця i [10]:

$$P_i = \frac{b_i}{2^{n-1}}. \qquad (4)$$

Індекс впливу Банзафа [11] є вектор β, координати якого обчислюють за часткою коаліцій, в яких даний гравець є ключовим:

$$\beta_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j}, \qquad (5)$$

де $\sum_j b_j$ – загальна кількість коаліцій, b_i – кількість коаліцій, де i – ключовий гравець.

Щоб перейти до індексу Пенроуза (міри Банзафа), загальний індекс Банзафа можна просто поділити на 2^{n-1}.

Зрозуміло, що результати обчислень впливу «по Банзафу» і «по Шеплі-Шубіку» не завжди узгоджені. Виникають два питання – який індекс краще описує «вплив» і в чому причина цієї різниці.

Індекс Шеплі-Шубіка – єдиний індекс впливу, який не потрібно спеціально нормувати для того, щоб сума впливів гравців дорівнювала 1. А сума мір Банзафа не дорівнює одиниці.

Різниця у результатах обчислення двох класичних індексів заснована на концепціях I-Power [12] та P-Power [13], які по-різному інтерпретують поняття «впливу».

I-Power означає «влада як вплив» (power as influence). У випадку I-Power вважається, що на рішення, яке приймається усіма гравцями, впливають усі гравці, незалежно від того, як вони проголосували. В цьому випадку природним буде застосування індексу Банзафа.

P-Power означає «влада як володіння» (power as prize). Це відрізняється від I-Power тим, що розуміють під результатом прийняття рішення. У випадку P-Power «приз перемоги» отримують лише ті, хто проголосував «за». Прикладом тут може бути – поділ «пирога» між членами переможної коаліції. Ті, хто не потрапив до неї, нічого не отримують. Отже, такий вплив визначається як відносна величина – це частка «пирога», яку отримує кожен з членів переможної коаліції. Тобто виникає класична кооперативна гра та одним із природних її розв'язків буде індекс Шеплі-Шубіка.

Практична частина. Обчислення індексів впливу парламентських партій України 2019 року.

Розглянемо парламент, сформований з представників багатьох партій, жодна з яких не здатна окремо проводити політичні рішення, оскільки не має потрібної кількості голосів. У такій ситуації зручно вважати партії гравцями, вага кожного з яких дорівнює кількості голосів, якими розпоряджається партія.

Партії вимушені створювати коаліції, щоб проводити вигідні політичні рішення спільно. При цьому потрібно з одного боку набрати достатню кількість союзників, щоб рішення було прийнятим, а з другого – взяти мінімальну необхідну кількість союзників, оскільки за таку допомогу доведеться потім платити, голосуючи так, як потрібно партії-союзнику. Виникають складні процеси, що призводять до того, що партія з невеликою кількістю голосів може виявитись фактично впливовішою за велику партію. Для більш точного їх аналізу і обчислюються індекси впливу.

Розглянемо п'ять партій парламенту України (сформованого влітку 2019 року, внаслідок дострокових виборів) та обчислимо для них основні індекси впливу. Числові дані взято із опублікованих офіційних результатів виборів до Верховної Ради (табл. 1). [14]. *Зауваження*. В роботі ми не враховуємо 82 депутата позафракційних, оскільки вони не є цілісною групою, а збір та аналіз даних по кожному депутату окремо суттєво ускладнить задачу.

Складемо для партій всі можливі варіанти коаліцій, виберемо з них ті, що можуть приймати конституційні рішення (тобто, мають не менше 300 голосів, як визначено у відповідному законі України), це і будуть переможні коаліції (табл. 2).

Тепер можна обчислити вектор Шеплі за формулою (2): $\varphi = (0,323; 0,226; 0,226; 0,194; 0,194)$.

Тоді, з точки зору розв'язку по Шеплі, компоненти партій B, C та D, E співпадають, хоча кількість мандатів у цих партій у парламенті різна. Це ви-пливає з того, що можливості утворення коаліцій у цих пар партій однакові. Для партії A ситуація є природною, бо ця партія має найбільшу кількість мандатів у парламенті.

Використовуючи формулу (3) обчислимо індекс впливу Шеплі-Шубіка для кожної партії.

Для партії A:

$$SS_A = 5 \cdot \frac{(5-3)!(3-1)!}{5!} + 4 \cdot \frac{(5-4)!(4-1)!}{5!} + \frac{(5-5)!(5-1)!}{5!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \approx 0,567$$

Для партії B:

$$SS_B = 3 \cdot \frac{(5-3)!(3-1)!}{5!} + 3 \cdot \frac{(5-4)!(4-1)!}{5!} + \frac{(5-5)!(5-1)!}{5!} = \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{5} = 0,45$$

Для партії C:

$$SS_C = 3 \cdot \frac{(5-3)!(3-1)!}{5!} + 3 \cdot \frac{(5-4)!(4-1)!}{5!} + \frac{(5-5)!(5-1)!}{5!} = 0,45$$

Для партії D:

$$SS_D = 2 \cdot \frac{(5-3)!(3-1)!}{5!} + 3 \cdot \frac{(5-4)!(4-1)!}{5!} + \frac{(5-5)!(5-1)!}{5!} = \frac{1}{15} + \frac{3}{20} + \frac{1}{5} = 0,417$$

Для партії E:

$$SS_E = 2 \cdot \frac{(5-3)!(3-1)!}{5!} + 3 \cdot \frac{(5-4)!(4-1)!}{5!} + \frac{(5-5)!(5-1)!}{5!} = 0,417$$

Таблиця 1

Склад парламенту 2019 року обрання

Партія	**Слуга народу**	**Опозиційна платформа «За життя»**	**Батьківщина**	**Європейська солідарність**	**Голос**
Позначення	A	B	C	D	E
Кількість депутатів	254	43	26	25	20

Таблиця 2

Коаліції, що можуть приймати конституційні рішення

коаліція	ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ABCD	ABCE	ABDE	ACDE	ABCDE
голоси	323	322	317	305	300	348	343	342	325	368

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Отже, індекс впливу Шеплі-Шубіка для партій A,B,C,D, відповідно, має такі компоненти: $SS = (0,567; 0,45; 0,45; 0,417; 0,417)$.

Використовуючи формули (4) та (5) обчислимо індекс Пенроуза (міру Банзафа) та індекс Банзафа для наших партій. Позначимо: $b(A)$ – кількість коаліцій з ключовою партією A, $b(B)$ – кількість коаліцій з ключовою партією B,…, $b(E)$ – кількість коаліцій з ключовою партією E. Тоді в результаті обчислень (на основі даних табл. 2 та табл. 1) маємо: $b(A) = 10$, $b(B) = 4$, $b(C) = 4$, $b(D) = 2$, $b(E) = 2$.

Обчислення індексу Банзафа для кожної партії:

$$\beta_A = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \approx 0,455,$$

$$\beta_B = \beta_C = \frac{4}{22} = \frac{2}{11} \approx 0,182,$$

$$\beta_D = \beta_E = \frac{2}{22} = \frac{1}{11} \approx 0,091.$$

Отже, **індекс впливу Банзафа** для кожної партії:

$$\beta = (0,455; 0,182; 0,182; 0,091; 0,091).$$

Обчислення міри Банзафа або індексу Пенроуза для кожної партії:

$$P_A = \frac{10}{2^{5-1}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \approx 0,625,$$

$$P_B = P_C = \frac{4}{2^{5-1}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \approx 0,25,$$

$$P_D = P_E = \frac{2}{2^{5-1}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \approx 0,125.$$

Отже, **індекс впливу Пенроуза** для кожної партії:

$$P = (0,625; 0,25; 0,25; 0,125; 0,125)$$

Бачимо, що вплив партії на прийняття рішення не є пропорційним кількості мандатів, які в неї є. Маючи різну кількість мандатів партії B та C мають однакові міру та індекс Банзафа. Аналогічна ситуація з партіями D та E.

Зауважимо, що маючи різницю лише в 1 голос партії C та D мають різні індекси впливу. Отримані результати зведемо до таблиці 3.

З табл. 3 бачимо, що індекси Банзафа та Шеплі-Шубіка у партій B та C однакові, коли їх частка мандатів у Верховній раді досить суттєво відрізняється. За індексом Шеплі-Шубіка вплив партій на прийняття рішень у парламенті на конституційні рішення значно менше відрізняється ніж за індексом Банзафа. Загалом, всі обчислені показники впливу показують, що на їх величину впливає не тільки кількість мандатів певної партії а і суттєву роль відіграє можливість утворення коаліцій. Слід відмітити, що всі обчислені показники впливу у партій B,C та D,E співпадають. Із обчислених значень індексів впливу робимо висновок: партія A має найбільший вплив на прийняття рішень у парламенті, але в той же час вона не може одноосібно проводити конституційні рішення без інших партій. На другому місці по силі впливу стоять партії B та C. Партії D та E мають найменший вплив у парламенті.

Кореляційний аналіз розподілу голосів респондентів.

Для дослідження електорального настрою було проведено опитування респондентів з приводу виборів президента України 31 березня 2019 року, яке проводилось в період з 25 лютого по 06 березня. Респондентами обрано студентів НТУУ «КПІ» ім. І. Сікорського 2-4 курсів різних факультетів. Вибіркова сукупність складається зі 100 студентів, що дали рейтингові оцінки кандидатам у президенти та партіям, які вони представляють.

Вибірковий парний коефіцієнт кореляції, знайдений за вибіркою обсягом n, де (x_i, y_i) – результат i-го спостереження $(i = 1, 2, ..., n)$ визначається формулою:

$$r_{xy} = r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}, \qquad (6)$$

де $s_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{(x)}^2}$ і $s_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{(y)}^2}$ – середньоквадратичні відхилення [15].

За даними опитування обчислимо коефіцієнти кореляції між рейтинговими оцінками респондентів п'яти парламентських партій (табл. 4) за допомогою формули (6).

Таблиця 3

Порівняння часток мандатів та індексів впливу партій

	Частка мандатів	**Індекс Банзафа**	**Індекс Шеплі-Шубіка**	**Індекс Пенроуза**	**Вектор Шеплі**
A	0,69	0,455	0,567	0,625	0,323
B	0,12	0,182	0,450	0,25	0,226
C	0,071	0,182	0,450	0,25	0,226
D	0,067	0,091	0,417	0,125	0,194
E	0,054	0,091	0,417	0,125	0,194

Таблиця 4

Парні коефіцієнти кореляції між рейтинговими оцінками партій

	Слуга народу (A)	**Батьківщина (B)**	**ОП За життя (C)**	**Солідарність (D)**	**Голос (E)**
Слуга народу	1				
Батьківщина	0,377	1			
ОП За життя	0,335	0,190	1		
Солідарність	0,321	0,510	0,271	1	
Голос	0,333	0,345	0,285	0,464	1

З табл. 4 можемо зробити такі висновки: всі рейтингові оцінки представлених партій приблизно однаково корелюються з оцінками партії А – слуга народу. Найвищий коефіцієнт кореляції у партій B, D. Отже коаліції, в які входять ці дві партії є більш стійкими. з точки зору виборців.

Як було показано вище, партія А (Слуга народу) є ключовою у кожній коаліції, здатній прийняти конституційне рішення. Але рейтингові оцінки цієї партії мають досить невисокий коефіцієнт кореляції з іншими партіями. Отже, виборча кампанія цієї партії була побудована на протиставленні себе іншим партіям. Для роботи в парламенті, для прийняття конституційних рішень, цій партії доведеться утворювати коаліції з іншими партіями, але тоді рейтинг цієї партії у виборців може впасти.

Обчислимо також множинні коефіцієнти кореляції для виграшних коаліцій та співставимо їх з індексом Банзафа (табл. 5).

Таблиця 5

Множинні коефіцієнти кореляції для коаліцій

Коаліції	Множинний коеф. кореляції	Партії	Індекс Банзафа
ABC	0,45		
ABD	0,39	A	0,455
ABE	0,39	B	0,182
ACD	0,28	C	0,182
ACE	0,39	D	0,091
ABCD	0,66	E	0,091
ABCE	0,72		
ABDE	0,67		
ACDE	0,57		
ABCDE	0,49		

Для обчислення множинного коефіцієнта кореляції в загальному випадку застосуємо формулу

$$R_{i,12\ldots p} = \sqrt{1 - \frac{|q_p|}{q_{ii}}}\ , \quad (7)$$

де – $|q_p|$ визначник кореляційної матриці, а q_{ii} – алгебраїчне доповнення елемента r_{ii} тої самої матриці [16].

Як бачимо, найвищий коефіцієнт кореляції (з точки зору виборців) має коаліція ABCE, тобто коаліція всіх партій за винятком партії «Європейська солідарність». З іншого боку індекс Банзафа у партій D та E однаковий, але якщо у коаліції ABCE поміняти партію E на партію D, то множинний коефіцієнт кореляції зменшиться. Множинний коефіцієнт кореляції усіх п'яти партій є суттєво нижчим ніж у коаліції ABCE. Найменший коефіцієнт кореляції має коаліція ACD, тобто виборці найменше хочуть бачити таку коаліцію у парламенті. Коаліції ABD, ABE, ACE мають однакові множинні коефіцієнти кореляції і їм відповідають однакові індекси впливу партій, що входять до них.

Висновок. З усього цього можна зробити висновок, що знання індексів впливу партій для створення коаліцій варто підкріплювати знанням множинних коефіцієнтів кореляцій між відповідними рейтинговими оцінками виборців. Таке знання допоможе утворювати найбільш успішні коаліції і при цьому не губити рейтинги у виборців. Різні індекси впливу парламентських партій дозволяють краще зрозуміти, які коаліції у парламенті є більш впливовими, а множинні коефіцієнти кореляції показують, які коаліції для виборців є пріоритетними.

Наведені в роботі результати мають практичне та теоретичне спрямування і можуть знайти застосування при виборі стратегій прийняття управлінських рішень на основі створення найбільш ефективних коаліцій парламенту.

Список літератури:

1. J. von Neumann, O. Morgenstern. Theory of games and economic behavior. Princeton, 1953. 625 p.
2. Воробьёв Н.Н. Современное состояние теории игр. *Успехи математических наук*. 1970. Т. 25 № 2(152). С. 80–140.
3. Соколова А.В. Количественные методы оценки влияния участников при принятии коллективных решений. *Полития*. 2008. № 4. С. 152–157.
4. Сандирєва М.А. Історія виникнення та розвитку теорії ігор. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/nauka/naukovo-populiarni-publikatsii/859-istoriya-vynyknennya-ta-rozvytku-teoriyi-ihor.html (дата звернення: 12.02.2020).
5. Корнієнко В.О., Денисюк С.Г., Шиян А.А. Моделювання процесів у політико-комунікативному просторі : Монографія. Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. 185 с.
6. Барановська Л.В. Теорія ігор. URL: http://mmsa.kpi.ua/trainings/game-theory (дата звернення: 12.02.2020).
7. Крушевский А.В. Теория игр. Экономическая кибернетика. Киев : «Вища школа», 1977. 216 с.
8. Shapley L. Utility and the Theory of Games, Editions du Centre Nattional de la Recherche Scientifique. 1969. P. 251–263.
9. Shapley L.S., Shubik M. A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. *American Political Science Review*. 1954. Vol. 48, issue 3, pp. 787–792.
10. Соколова А.В. Количественные методы оценки влияния участников при принятии коллективных решений. URL: http://politeia.ru/files/salmins_premium/7_third.pdf (дата звернення: 12.02.2020).
11. Banzhaf III, J. F. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers. 1965, pp. 317–343.
12. Felsenthal D.S. Machover M. The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes. Cheltenham: Edward Elgar, 1998. 322 p.
13. Felsenthal D.S., Machover M. Voting power measurement: a story of miss reinvention. Social Choice and Welfare. 2005. Vol. 25, № 2-3. P. 485–506.
14. Офіційні результати виборів до Верховної Ради. URL: https://ua-news.liga.net/politics/news/opublikovano-ofitsiyni-rezultati-viboriv-do-verhovnoi-radi (дата звернення: 12.02.2020).
15. Селезньова Н.П., Рудик Т.О. Математичне моделювання моніторингу якості освіти. *Development trends in pedagogical and psychological sciences: the experience of counties of Eastern Europe and prospects of Ukraine* : monograph / edited by authors. 2nd ed. Riga, Latvia : "Baltija Bublishing", 2018. P. 298–317. doi https://dx.doi.org/doi.org/10.30525/978-9934-571-27-5
16. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 573 с.

References:

1. J. von Neumann, & O. Morgenstern (1953). *Theory of games and economic behavior*. Princeton, 625 p.
2. Vorob'ev, N.N. (1970). Sovremennoe sostoyanie teorii igr [Modern state of game theory]. *Advances in Mathematics*, vol. 25, № 2(152), pp. 80–140.
3. Sokolova, A.V. (2008). Kolichestvennye metody otsenki vliyaniya uchastnikov pri prinyatii kollektivnykh resheniy [Quantitative methods for assessing the influence of participants in collective decision making]. *Politiya,* no. 4, pp. 152–157.
4. Sandyrjeva, M.A. Istorija vynyknennja ta rozvytku teoriji ighor [Game theory origins and development history]. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/nauka/naukovo-populiarni-publikatsii/859-istoriya-vynyknennya-ta-rozvytku-teoriyi-ihor.html (accessed: 12.02.2020).
5. Kornijenko, V.O., Denysjuk, S.G., & Shyjan, A.A. (2009). *Modeljuvannja procesiv u polityko-komunikatyvnomu prostori: Monoghrafija* [Modeling the processes at the polity-communicative space: Monographs]. Vinnytsia: UNIVERSUM-Vinnytsia, 185 p.
6. Baranovsjka, L.V. *Teorija ighor* [Game Theory]. URL: http://mmsa.kpi.ua/trainings/game-theory (accessed: 12.02.2020).
7. Krushevskiy, A.V. (1977). *Teoriya igr* [Game Theory]. Economic cybernetics. Kiev: «High School», 216 p.
8. Shapley, L. (1969). Utility and the Theory of Games, Editions du Centre Nattional de la Recherche Scientifique, pp. 251–263.
9. Shapley, L.S., & Shubik, M. (1954). A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. *American Political Science Review*, vol. 48, issue 3, pp. 787–792.
10. Sokolova A.V. *Kolichestvennye metody otsenki vliyaniya uchastnikov pri prinyatii kollektivnykh resheniy* [Quantitative methods for evaluating the influence of participants in collective decision making]. URL: http://politeia.ru/files/salmins_premium/7_third.pdf (accessed: 12.02.2020).
11. Banzhaf III, J. F. (1965). Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers, pp. 317–343.
12. Felsenthal, D.S., & Machover, M. (1998). The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes. Cheltenham: Edward Elgar, 322p.
13. Felsenthal, D.S., & Machover, M. (2005). Voting power measurement: a story of miss reinvention. *Social Choice and Welfare*. Vol. 25, № 2-3. P. 485–506.
14. Office results of election to the Verkhovna Rada URL: https://ua-news.liga.net/politics/news/opublikovano-ofitsiyni-rezultati-viboriv-do-verhovnoi-radi (accessed: 12.02.2020).
15. Seleznova, N.P., & Rudyk, T.O. (2018). *Matematychne modeljuvannja monitoryngHu jakosti osvity* [Mathematical modeling of the monitoring of education quality]. *Development trends in pedagogical and psychological sciences: the experience of counties of Eastern Europe and prospects of Ukraine*: monograph / edited by authors. 2nd ed. Riga, Latvia: "Baltija Bublishing", pp. 298–317. doi: https://dx.doi.org/doi.org/10.30525/978-9934-571-27-5
16. Kremer, N.Sh. (2004). *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Textbook for universities. 2 edition. Moskow: YuNITI-DANA, 573 p.