ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-2-78-5
УДК 539.3

Прудько Е.И.
Днепровский государственный техникум
энергетических и информационных технологий

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Аннотация. При оптимальном проектировании внутренней структуры функционально-градиентного материала (ФГМ) на основе классического метода осреднения в случаях малой концентрации включений, когда размеры включений много меньше расстояния между ними, возникают значительные вычислительные трудности. Разработка варианта метода осреднения, позволяющего эффективно решать задачи оптимизации внутренней структуры ФГМ при малой концентрации включений и иллюстрация его на конкретных примерах. Предлагаемая методика позволяет решать задачи расчета и оптимального проектирования внутренней структуры ФГМ конструкций с переменной величиной включений и с переменным шагом между ними по единой методике.

Ключевые слова: функционально-градиентный материал,оптимальное проектирование внутренней структуры, метод осреднения, продольная деформация стержня.

Prudko Elena
Dniprovsky State Technical School
of Energy and Information Technologies

MATHEMATICAL MODELS OF OPTIMAL STRUCTURE OF FUNCTIONAL-GRADIENT MATERIALS

Summary. With optimal design of inner structure of functionally graded material (FGM) based on the classical method of homogenization procedure, in cases of low concentration of inclusions, when the size of inclusions is essentially less than the distance between them, leads to computational difficulties. The research to develop a homogenization procedure, allowing solving effectively the problem of optimizing the internal structure of FGM at low concentrations of inclusions and illustration with specific examples. The proposed method allows solving tasks of calculation and optimal design of the internal structure of FGM structures with variable inclusions and with a variable step between them using the same methodology. The optimization is performed using two mechanisms. The first allocation is fixed at the edges of the border areas in which inclusions are absent. The second optimization mechanism is the distribution of inclusions sizes under the law, coinciding with the distribution law of an external load. Alternate step for the step should be reduced in areas with greater intensity of the external load. The proposed technique allows us to solve the problems of calculation and optimal design of the internal structure of FGM structures with a variable value of inclusions and with a variable pitch between them according to a single method. These tasks turned out to be mathematically identical, the difference lies in the different physical senses of the coefficients of the equations of state and objective functions. In this case, optimization is carried out using two mechanisms. The first is the allocation at the fixed edges of the border areas in which there are no inclusions. The second optimization mechanism is to redistribute the size of inclusions according to a law that coincides with the law of distribution of the external load. With a variable step between inclusions, the step should decrease in areas with a greater intensity of external load. The indicated optimization mechanisms, obvious from a physical point of view, found their mathematical justification in this work. It can be expected that the proposed method will also be effective in the calculations and optimal design of more complex heterogeneous structures described by higher order differential equations.

Keywords: functionally graded rod, homogenization method, functionally graded inclusion size, functionally graded step between inclusions.

Постановка проблемы. Снижение материалоемкости силовых элементов конструкций в условиях наиболее полного использования резервов их прочности, жесткости и надежности является одним из важнейших требований прогресса в судно-, авиа-, ракета-, и космическом машиностроении, строительной индустрии и т.д. В этих целях широко применяются композитные материалы и конструкции. Вместе с тем, возможности улучшения характеристик традиционных регулярных композитных материалов на сегодняшний день во многом исчерпаны. Значительным резервом в этом направлении является использование второго поколения композитных материалов – функционально-градиентных материалов (ФГМ), квазирегулярных гетерогенных материалов, у которых механические или геометрические характеристики неоднородностей, или их распределение непрерывно изменяются по заданному закону. Этот закон, определяющий структуру ФГ материала, должен отвечать условиям нагружения ФГМ конструкций. При этом, следует учитывать, что даже в тех случаях, когда из-за большей стоимости или трудностей технологического характера возможности применения ФГМ оптимальной структуры ограничены, исследования оптимальных проектов имеет важное значение, так как позволяет теоретически оценить качество традиционных конструкций.

Анализ исследований и публикаций. Для расчета ФГМ конструкций, как правило, применяют различные варианты МКЭ [1–3]. Но оптимизация структуры ФГМ для конкретных задач с помощью МКЭ вызывает значительные вычислительные трудности, поскольку требует больших серий решений прямых задач. Для регулярных композитов альтернативой МКЭ служит метод гомогенизации [4–6], который позволяет свести исходную краевую задачу в многосвязной области к рекуррентной последовательности краевых задач в односвязных областях. При этом, как правило, коэффициенты уравнений состояния аппроксимируются отрезками ряда Фурье при небольшом количестве членов. В работах [7–11] были предложены модификации метода осреднения, позволяющие рассматривать прямые и обратные задачи для функционально-градиентных материалов.

Цель исследования. Малые отрезки рядов Фурье хорошо описывают коэффициенты уравнений состояний ФГМ конструкций только при большой концентрации включений (зерен, волокон и т.п.), когда расстояние между включениями имеет тот же порядок, что и их характерный размер. При малой же концентрации, когда расстояние между включениями много больше их размеров, коэффициенты уравнений состояния представляют собой периодические импульсные функции. В этом случае реализация метода осреднения в аналитическом виде вызывает определенные трудности. При этом аналитические решения важны при проектировании конструкций из композитных материалов и особенно конструкций из ФГМ. Поэтому при малой концентрации включений выгоднее использовать предлагаемый ниже вариант метода осреднения, в котором используется малость размеров включений по сравнению с расстоянием между ними. Предлагаемая методика проиллюстрирована на примере модельной задачи – продольной деформации стержня из ФГМ. Диаметр стержня сопоставим с размерами включений.

Основной материал. 1. Включения переменной величины. Закон изменения размеров включения может быть задан, например, в виде функции $V = V(x)$, определяющей объём включения в зависимости от координаты x его расположения. Заменим включения сосредоточенными упругими вставками, жесткости которых $k_1(z)$ характеризуют влияние включений.

Если количество включений n велико и расстояние между ними $l = z_i - z_{i-1}$ много меньше характерного размера конструкции, в данном случае $l \ll L$ – длины стержня. Тогда для исследования продольной деформации двухкомпонентного стержня можно применить следующий вариант метода осреднения. Запишем уравнение равновесия стержня между упругими вставками в безразмерном виде

$$\frac{d^2u}{dx^2} = q, \tag{1}$$

где $x = \frac{z}{l}$; $u = \frac{v}{l}$; v – продольное смещение; $q = \frac{p(x)}{lk_0}$; $p(x)$ – распределенная внешняя нагрузка; $k_0 = E_0 F$; E_0 – коэффициент упругости базового материала стержня (матрицы); F – площадь поперечного сечения.

Условия сопряжения на i – ом упругом сечении можно записать так

$$(u)^- = (u)^+; \left(\frac{du}{dx}\right)^- - \left(\frac{du}{dx}\right)^+ = k(x)u, \tag{2}$$

где $(\ldots)^-; (\ldots)^+$ – соответственно предел слева и справа в точке $x = i$; $k(x) = \frac{lk_1(x)}{k_0}$.

1.1 Методика осреднения. Введем переменную $\xi = x/\varepsilon$, где $\varepsilon = 1/n \ll 1$, которую будем считать независимой от переменной x. Перемещение u представим в виде асимптотического разложения

$$u = u_0(x) + \varepsilon^2 u_1(x,\xi) + \varepsilon^3 u_2(x,\xi) + \cdots, \tag{3}$$

где $u_s, (s = 1, 2, \ldots)$ – периодические по ξ функция с периодом n. Подставляя разложение (3) в уравнение (1) и условия (2), получаем осредненное уравнение продольной деформации двухкомпонентного стержня

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} + k(x)u_0 = q. \tag{4}$$

Микромеханические эффекты описываются составляющей разложения u_1, которая находится из уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \left(q - \frac{d^2u_0}{dx^2}\right)\left(\xi - \frac{n}{2}\right). \tag{5}$$

1.2 Обратная задача. Существенным преимуществом предлагаемого подхода к исследованию конструкций из ФГМ является то, что он позволяет ставить и эффективно решать задачи оптимизации – задачи определения оптимальных характеристик внутренней структуры материала, обеспечивающих заданные свойства конструкции.

В качестве примера рассмотрим задачу определения функции $k(x)$, обеспечивающей наибольшую продольную жесткость рассматриваемого двухкомпонентного стержня при заданной распределенной нагрузке $q(x)$. Без потери общности, выберем граничные условия в виде

$$u_0(0) = 0; \left.\frac{du_0}{dx}\right|_{x=n} = 0. \tag{6}$$

В качестве меры жесткостных свойств стержня выберем податливость, ограничившись нулевым приближением для смещения

$$I = \int_0^n qu_0 dx \to min_k. \tag{7}$$

В качестве ограничения естественно выбрать условие постоянства суммарного объёма включений

$$\int_0^n k(x)dx = c. \tag{8}$$

На практике размеры включений имеют технологические ограничения. Из этого следует еще одно ограничение для целевой функции

$k_{min} \le k(x) \le k_{max}$, которое удовлетворяется введением вспомогательной функции управления $\theta(x)$

$$k = \alpha + \gamma sin\theta , \tag{9}$$

где $\alpha = 0.5(k_{min} + k_{max}); \gamma = 0.5(k_{min} + k_{max})$.

Относительно вспомогательной функции управления $\theta(x)$ рассматриваемая обратная задача (10)-(16) запишется так

$$I = \int_0^n q u_0 dx \to min_\theta \int_0^n sin\theta dx = c ; \tag{10}$$

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} + (\alpha + \gamma sin\theta) u_0 = q ; \; u_0(0) = 0; \left(\frac{du_0}{dx}\right)_{x=n} = 0 . \tag{11}$$

Приравнивая нулю вариацию функционала Лагранжа задачи (10), (11) получаем условие оптимальности

$$cos\theta\left(u_0^2 - \lambda\right) = 0 , \tag{12}$$

где λ – множитель Лагранжа.

Из условия оптимальности (12) следует, что функция управления $k(x)$ представляет собой кусочно-непрерывную функцию

$$k = \begin{cases} k_{min}, x \in (0, x_1); \\ \pm \dfrac{q}{\sqrt{\lambda}}, x \in (x_1, L). \end{cases} \tag{13}$$

Постоянная Лагранжа λ находится из изопериметрического условия (14), которое принимает вид

$$\int_{x_1}^n q dx = \pm\sqrt{\lambda}\,(c - k_{min}x_1) . \tag{14}$$

Координата точки x_1 находится из условий непрерывности в этой точке смещения и деформации стержня (к этим условиям приводят соотношения на изломах экстремалей Вейерштрасса-Эрдмана [9]).

2. Переменный шаг между включениями. Другой технологической возможностью обеспечения градиентности свойств конструкций является использование ФГМ у которых размеры включений одинаковые, но шаг между ними меняется по заданному закону. Рассмотрим базовый двухкомпонентный стержень с одинаковыми упругими вставками $k = const$. Зафиксируем количество вставок n и будем менять расстояние между ними l по некоторому закону. Для описания закономерности изменения шага введем функцию $f(x)$, такую, что $f(x_i) = i$, тогда шаг между включениями $l \approx 1/f'(x)$. В работе [8] получены условия для сохранения неизменным количества вставок

$$f(0) = 0; f(n) = n; f'(x) \ge 0 . \tag{15}$$

2.1 Прямая задача расчета. Если толщину вставок устремить к нулю, то уравнение продольной деформации стержня при шаговой градиентности можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k\sum_{i=1}^n \delta\left(f(x_1) - i\right) u = q , \tag{16}$$

где δ – дельта функция Дирака.

Введем переменную $\eta = f(x)$, тогда $x = f^{-1}(\eta)$. Относительно новой переменной уравнение (16) запишется так

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{du}{\varphi d\eta}\right) + k\sum_{i=1}^n \delta(\eta - i)\varphi u = Q , \tag{17}$$

где $\varphi = \dfrac{d\left(f^{-1}\right)}{d\eta}; Q = \varphi q$.

Уравнение (17) представляет собой уравнение с периодически разрывными коэффициентами, и для него можно применить схему осреднения, аналогичную методики **п. 1.1**. В результате получаем осредненное уравнение продольной деформации двухкомпонентного стержня с переменным шагом между включениями

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} + kf'(x) u_0 = q . \tag{18}$$

2.2 Обратная задача. Рассмотрим обратную задачу для уравнения (18) с граничными условиями (6). В качестве управляющей выберем функцию $\psi = kf'(x)$. Минимизировать будем податливость стержня

$$\int_0^n u_0 q dx \to min_\psi . \tag{19}$$

Условия сохранения количества включений (15) приводят к изопериметрическому ограничению для целевой функции

$$\int_0^n \psi dx = kn. \tag{20}$$

На целевую функцию ψ также накладываются технологические ограничения, аналогичные (15), которые будут выполнятся автоматически после введения вспомогательной целевой функции (9). Тогда рассматриваемая задача будет совпадать с задачей **п. 1.2**.

3. Заключение. Предлагаемая методика позволяет решать задачи расчета и оптимального проектирования внутренней структуры ФГМ конструкций с переменной величиной включений и с переменным шагом между ними по единой методике. Эти задачи оказались математически идентичными, отличие состоит в разных физических смыслах коэффициентов уравнений состояния и целевых функций. При этом оптимизация проводится с помощью двух механизмов. Первый – выделения у закрепленных краев приграничных участков, в которых включения отсутствуют. Второй механизм оптимизации заключается в перераспределении размеров включений по закону, совпадающему с законом распределения внешней нагрузки. При переменном шаге между включениями шаг должен уменьшаться на участках с большей интенсивностью внешней нагрузки. Указанные механизмы оптимизации, очевидные с физической точки зрения, нашли свое математическое обоснование в настоящей работе.

Можно ожидать, что предлагаемая методика будет также эффективна при расчетах и оптимальном проектировании более сложных гетерогенных конструкций, описываемых дифференциальными уравнениями более высокого порядка.

Список литературы:

1. Ilschner B., Cherradi N., 3rd International Symposium on Structural and Functional Gradient Materials, Lausanne, Switzerland, 1994.
2. Suresh S., Mortensen A., Fundamentals of Functionally Graded Materials, Institute of Materials, London, 1998.
3. Hirai T., in R.J. Brook (Ed.), Materials Science and Technology, Vol. 17B, Processing of Ceramics, Part 2, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, Germany, 1996, 292–341.
4. Bolshakov V.I., Danishevs'kyy V.V. Effective shear modulus and microscopic stresses in a fibred-reinforced composite materials with interphases. Bulletin of Prydniprovs'ka Academy of Civil Engineering and Architecture. 2006, no. 36, pp. 167–173.
5. Bolshakov V.I., Danishevs'kyy V.V. Asymptotic multiscale modelling of heat conduction in fibre-reinforced composite material with imperfect bonding / Proc. AFE 2006 Forum "Aims for Future of Engineering Science". – Davos (Switzerland), 2006. P. 97–107.
6. Bolshakov V.I., Danishevs'kyy V.V., Weichert D. Propagation of elastic waves in periodic composite structures. Bulletin of Prydniprovs'ka Academy of Civil Engineering and Architecture. 2008, no. 45, pp. 31–39.
7. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. Homogenization of the irregular cell-types constructions. Proc. 8th Conf. Dyn. Syst. – Theory Appl. Lodz, 2, 2005, 871–876.
8. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. Homogenization of quasiperiodic structures. Trans. ASME J. Vibr. Acoust., 2006, 128(4), 532–534.
9. Andrianov I., Awrejcewicz J., Diskovsky A. Asymptotic investigation of corrugated elements with quesi-periodic structures. Proc. 10-th Conf. Dyn. Syst. – Theory Appl., 2. Lodz, 2009, 523–532.
10. Andrianov I., Awrejcewicz J., Diskovsky A. Homogenization of the functionally-graded materials. Proc. 11-th Conf. Dyn. Syst. – Theory Appl., 2, Lodz, 2011, 55–62.
11. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. Sensitivity analysis in design of constructions made of functionally-graded materials. Proc. Inst. Mech. Eng.
12. Part C: J. Mech. Eng. Sc., 2013, 227(1), 19–28.

References:

1. Ilschner B., Cherradi N., 3rd International Symposium on Structural and Functional Gradient Materials, Lausanne, Switzerland, 1994.
2. Suresh S., Mortensen A., Fundamentals of Functionally Graded Materials, Institute of Materials, London, 1998.
3. Hirai T., in R.J. Brook (Ed.), Materials Science and Technology, Vol. 17B, Processing of Ceramics, Part 2, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, Germany, 1996, 292–341.
4. Bolshakov V.I., Danishevs'kyy V.V. Effective shear modulus and microscopic stresses in a fibred-reinforced composite materials with interphases. Bulletin of Prydniprovs'ka Academy of Civil Engineering and Architecture. 2006, no. 36, pp. 167–173.
5. Bolshakov V.I., Danishevs'kyy V.V. Asymptotic multiscale modelling of heat conduction in fibre-reinforced composite material with imperfect bonding / Proc. AFE 2006 Forum "Aims for Future of Engineering Science". – Davos (Switzerland), 2006. P. 97–107.
6. Bolshakov V.I., Danishevs'kyy V.V., Weichert D. Propagation of elastic waves in periodic composite structures. Bulletin of Prydniprovs'ka Academy of Civil Engineering and Architecture. 2008, no. 45, pp. 31–39.
7. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. Homogenization of the irregular cell-types constructions. Proc. 8th Conf. Dyn. Syst. – Theory Appl. Lodz, 2, 2005, 871–876.
8. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. Homogenization of quasiperiodic structures. Trans. ASME J. Vibr. Acoust., 2006, 128(4), 532–534.
9. Andrianov I., Awrejcewicz J., Diskovsky A. Asymptotic investigation of corrugated elements with quesi-periodic structures. Proc. 10-th Conf. Dyn. Syst. – Theory Appl., 2. Lodz, 2009, 523–532.
10. Andrianov I., Awrejcewicz J., Diskovsky A. Homogenization of the functionally-graded materials. Proc. 11-th Conf. Dyn. Syst. – Theory Appl., 2, Lodz, 2011, 55–62.
11. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. Sensitivity analysis in design of constructions made of functionally-graded materials. Proc. Inst. Mech. Eng. Part C: J. Mech. Eng. Sc., 2013, 227(1), 19–28.