DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-4-80-3
УДК 539.3

Трубачев С.І., Колодежний В.А., Петрик В.О., Сіренко А.П.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

РОЗРАХУНОК ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ СТРИНГЕРІВ І ШПАНГОУТІВ

Анотація. В роботі розглянуті оболонки, підкріплені стрингерами і шпангоутами по лініям головних кривизн, які зведені до еквівалентних гладких оболонок зі змінними характеристиками жорсткості. Складність геометрії оболонок з каркасом із стрингерів і шпангоутів зумовлює необхідність розробки алгоритмів чисельних розрахунків на міцність та стійкість. Для еквівалентної оболонки, навантаженої осьовим розтягом-стиском, приведена методика визначення модулів пружності, а також циліндричних жорсткостей. Розглянуті загальні рівняння стійкості оболонок, побудовані на концепції використання функції напружень. Запропонований інженерний алгоритм розв'язання задачі стійкості розглянутих оболонок на основі вибору прогину, який найближче відображує характер хвилеутворення на поверхні оболонки при втраті стійкості. З геометричних міркувань функція прогину повинна відтворювати ум'ятини і опуклості що утворюються в оболонці, при цьому на контурі ум'ятин і опуклостей прогин повинен дорівнювати нулю. Відмічено, що у випадку, якщо в постановці задачі стійкості оболонки з каркасом із стрингерів і шпангоутів мають місце складні граничні умови і неможливе представлення розв'язку у вигляді ряду Фур'є, ефективним є використання чисельних методів розрахунку на основі запропонованого алгоритму.

Ключові слова: оболонка, циліндр, стрингер, шпангоут, стійкість, жорсткість, функція напружень.

Trubachev Serhii, Kolodezhnyi Valerii,
Petryk Vladyslav, Sirenko Anatolii
National Technical University of Ukraine
«Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky»

CALCULATION OF THE CYLINDRICAL SHELLS TAKING INTO ACCOUNT STRINGERS AND SPANGOUTS

Summary. The paper deals with shells, supported by strings and frames on the main curvature lines, which are reduced to equivalent smooth shells with variable rigidity characteristics. Methods of calculating mechanical systems for stability allow us to successfully solve problems for rod and shell structures. The widespread use of reinforced shells in aircraft structures is explained by the fact that they are able to withstand higher levels of compressive stresses at the same mass with smooth shells. However, the analytic solution of this problem becomes more complicated. When used to solve this problem, analytical approaches have to face the problem of summation of infinite series. Most numerical procedures are based on finite element method of decision, which is more universal, but requires a well-grounded formation of finite element model of the solved problem, so it is important in terms of labor costs which finite element element is used in the calculations. The complexity of the geometry of shells with strings and frames makes it necessary to develop algorithms of numerical calculations for strength and durability. For equivalent sheath loaded with axial compression, a method for determining the modulus of elasticity and cylindrical stiffness is given. The general equations of stability of shells, based on the concept of use of stress function, are considered. An engineering algorithm is proposed for solving the problem of stability of the considered shells based on the choice of deflection, which closely reflects the nature of the wave formation on the surface of the shell in case of loss of stability. For geometrical reasons, the deflection function should reproduce the dents and convexities formed in the shell, and the deflection on the contour of the dents and convexities should be zero. It is noted that in the case of formulation of the stability problem of a shell with a string of strings and frames, there are complex boundary conditions and it is impossible to represent the solution in the form of a Fourier series, it is effective to use numerous methods of calculation based on the proposed algorithm.

Keywords: shell, cylinder, stringer, frame, resistance, rigidity, stress function.

Постановка проблеми. Хвостові, міжбокові рухомі відсіки двигунів ракет і фюзеляжі літаків виготовляються у вигляді каркасних циліндричних оболонок. Каркасом в них є поздовжній набір стрингерів і поперечний – шпангоутів. На практиці широке застосування знайшли три види каркасів:

1. Стрингери і шпангоути, що мають приблизно рівні жорсткісні характеристики, рівномірно розташовані в поздовжньому і поперечному напрямках.

2. Шпангоути мають більш жорсткі характеристики, ніж стрингери, і розташовуються вони значно рідше, ніж стрингери.

3. Легкий каркасний набір першого типу доповнюється набором рідко розташованих посилених шпангоутів і стрингерів.

Враховуючи складну геометрію конструкцій, виникає актуальна проблема побудови інженерної методики розрахунку на міцність і стійкість каркасних циліндричних оболонок, що широко застосовуються в авіабудуванні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Методи розрахунку механічних систем на стійкість дозволяють досить успішно вирішувати завдання для стрижневих і оболонкових конструкцій [1]. Широке застосування підкріплених оболонок в конструкціях літальних апаратів пояснюється тим, що вони при однаковій масі з гладкими оболонками здатні витримувати більш високі рівні стискувальних напружень. Однак аналітичне рішення даної проблеми стає більш складним [2; 3]. При використанні для вирішення даної задачі аналітичних підходів доводиться стикатися з проблемою підсумовування нескінченних рядів [3]. Більшість чисельних процедур засновані на кінцево-елементній методиці рішення [4; 6; 7], яка більш універсальна, але вимагає обгрунтованого формування кінцево-елементної моделі розв'язуваної задачі, тому відносно трудовитрат важливо, яка кінцево-елементна модель використовується в розрахунках. Дана робота присвячена розвитку аналітичних підходів до вирішення завдань стійкості циліндричних оболонок і є розвитком робіт [1; 5; 7].

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Недостатньо досліджень, в яких запропоновані інженерні методики оцінки стійкості циліндричних оболонок з урахуванням стрингерів і шпангоутів, що дозволяють швидко і ефективно з точки зору трудовитрат вирішити це завдання.

Метою статті є визначення основних розв'язувальних рівнянь і алгоритму розв'язання задачі стійкості каркасних циліндричних оболонок.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо оболонки, підкріплюючий набір яких розташований по лініях головних кривизн. Такі оболонки вважаються конструктивно ортотропними. Методи розрахунку таких оболонок засновані на добре відомих методах розрахунку гладких оболонок. Для цього підкріплену оболонку замінюють деякою еквівалентною їй гладкою оболонкою з різними жорсткостними характеристиками по лініях головних кривизн. Після цього до еквівалентної оболонки застосовують добре розроблений апарат теорії гладких оболонок. Надалі розглянемо такі оболонки, підкріплюючий каркас яких утворює регулярну сітку. Розглянемо визначення модулів пружності для циліндричної оболонки, що знаходиться під дією розтягустиску в осьовому напрямку. При стисканні силою P гладкої оболонки сила здійснює роботу, яка дорівнює $A = P\Delta l$, де Δl – укорочення оболонки.

Відомо, що

$$\Delta l = \frac{Pl}{E_x F} = \frac{Pl}{2\pi R\delta E_x}, \tag{1}$$

де E_x – модуль Юнга, F – площа поперечного перерізу, R – радіус оболонки, δ – товщина стінки оболонки, l – довжина оболонки.

Тоді робота дорівнює

$$A = \frac{P^2 l}{2\pi R\delta E_x}. \tag{2}$$

При стисненні силою P підкріпленої оболонки вона буде частково сприйнята стрингерами P_1 і частково обшивкою P_2. Повна робота цих сил дорівнює

$$\overline{A} = nP_1\Delta l_1 + P_2\Delta l_2, \tag{3}$$

з урахуванням того, що

$$\begin{cases} \Delta l_1 = \varepsilon_1 l = \dfrac{P_1 l}{E_1 F_1}, \\ \Delta l_2 = \varepsilon_2 l = \dfrac{P_2 l}{E_2 F_2}, \end{cases} \tag{4}$$

маємо

$$\overline{A} = \left(\frac{nP_1^2}{E_1 F_1} + \frac{P_2^2}{E_2 F_2}\right) l, \tag{5}$$

де n – кількість стрингерів, F_1 – площа поперечного перерізу стрингерів, F_2 – площа поперечного перерізу оболонки, E_1 – модуль Юнга матеріалу стрингера, E_2 – модуль Юнга матеріалу оболонки.

Але $A = \overline{A}_2$ і, крім того,

$$\begin{cases} \Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l, \\ nP_1 + P_2 = P. \end{cases} \tag{6}$$

Враховуючи це, отримаємо вирази для зведеного модуля Юнга E_x еквівалентної гладкої оболонки:

$$E_x = E_2\left(1 + \frac{nF_1 E_1}{2\pi R\delta E_2}\right). \tag{7}$$

Аналогічно можна отримати вираз для модуля Юнга E_y:

$$E_y = E_2\left(1 + \frac{F_3 E_3}{a_2\delta E_2}\right), \tag{8}$$

де E_3 – модуль Юнга матеріалу шпангоута, F_3 – площа поперечного перерізу шпангоута, a_2 – довжина ділянки між сусідніми шпангоутами.

Для характеристик жорсткості на згин зазвичай приймають наступні співвідношення [1; 2]:

$$\begin{cases} D_y = \dfrac{E_2\delta^3}{12(1-\mu_x\mu_y)} + \dfrac{E_3 I_3}{a_2}, \\ D_x = \dfrac{E_2\delta^3}{12(1-\mu_x\mu_y)} + \dfrac{E_1 I_1}{a_1}, \end{cases} \tag{9}$$

де I_1 – момент інерції площі поперечного перерізу стрингера відносно його центральної осі, паралельної дотичній до кола оболонки, I_3 – момент інерції площі поперечного перерізу шпангоута щодо його центральної осі, паралельної твірній оболонки, a_1, a_2 – відстані між сусідніми стрингерами і шпангоутами відповідно, $\propto_x$, $\propto_y$ – коефіцієнти Пуассона. Зазвичай $\mu_x = \mu_y = \mu$, для жорсткостей на зріз і кручення приймають вирази:

$$D_{кр} = \frac{G_2\delta^3}{12},\ G_2 = \frac{E_2}{2(1+\mu)}. \tag{10}$$

З урахуванням введених позначень можна виразити внутрішні зусилля в підкріпленій оболонці у відомому в теорії оболонок вигляді [1; 2]:

$$N_x = \frac{E_x\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y),$$

$$M_x = -D_x(\lambda_x + \mu\lambda_y),$$

$$N_y = \frac{E_y\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x),$$

$$M_y = -D_y(\lambda_y + \mu\lambda_x),$$

$$N_{xy} = G_2\varepsilon_{xy},$$

$$M_{xy} = -2D_{кр}\lambda_{xy}.$$

Для компонентів деформацій і кривизн маємо звичайні залежності:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{w}{R_1}, \quad \chi_x = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{w}{R_1^2}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{w}{R_2}, \quad \chi_y = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \dfrac{w}{R_2^2}, \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \quad \chi_{xy} = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \qquad (11)$$

тут u, v – тангенціальні переміщення, w – прогин, R_1, R_2 – відповідні радіуси кривизни.

Для отримання диференціальних рівнянь рівноваги і сумісності деформацій для підкріплених оболонок зазвичай використовуються ті ж методи, що і для гладких оболонок. Таким чином, можна отримати:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_1}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{1}{R_2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_x \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\mu D_y + 2D_x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial x^2} + D_y \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \\ \dfrac{1}{E_y}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\dfrac{1}{G} - \dfrac{\mu_x}{E_x} - \dfrac{\mu_y}{E_y}\right)\dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{1}{E_x}\dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \dfrac{\delta}{R_1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\delta}{R_2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{cases} \qquad (12)$$

У формулах (12) прийняті ті ж позначення, що і в рівняннях В.З. Власова для ізотропних оболонок, де φ – функція напружень, q – нормальне навантаження [1; 2].

В задачах стійкості нормальне навантаження q складається з проекцій мембранних зусиль, що виникають в серединній поверхні оболонки від заданого зовнішнього навантаження, і визначається за формулою:

$$q = -N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \qquad (13)$$

Порядок розв'язання задачі з розрахунку оболонок на стійкість буде зводитися до наступного. Треба задати вираз для прогину, який по можливості більш повно описує характер очікуваного хвилеутворення на поверхні оболонки при заданому зовнішньому навантаженні. З точки зору геометрії вираз для прогину має бути рівнянням контуру ум'ятин і опуклостей, які утворюються на поверхні оболонки внаслідок втрати стійкості. На контурі ум'ятин і опуклостей прогин повинен дорівнювати нулю. Якщо частина контуру ум'ятини збігається з вільним краєм оболонки, то в цьому випадку $w \uparrow 0$, а поперечні сили дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_x}{\partial x} + 2\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial M_y}{\partial y} + 2\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Слід підкреслити, що розв'язання задачі стійкості для підкріплених оболонок з довільними граничними умовами вимагає застосування чисельних методів, тому що розв'язання аналітичним шляхом можна отримати тільки для тих випадків, коли розв'язок може бути представлений у вигляді ряду Фур'є.

Висновки і пропозиції. В роботі наведено аналітичний опис розв'язання задачі стійкості циліндричних оболонок, з урахуванням стрингерів і шпангоутів. Отримані розв'язувальні рівняння. Показано, що для розв'язання задач стійкості каркасних циліндричних оболонок з довільними граничними умовами необхідно використовувати чисельні методи, зокрема метод кінцевих елементів.

Список літератури:

1. Чемерис О.М., Колодежний В.А., Трубачев С.І. Будівельна механіка машин. Київ, 2017. 258 с. URL: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18961
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Москва, 1967. 984 с.
3. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Полаков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев, 1973. 248 с.
4. Норри Д., Фрид Ж. Введение в метод конечных элементов. Москва, 1981. 304 с.
5. Яхно Б.О., Трубачев С.И. Напряжено-деформированное состояние цилиндрических толстостенных перфорированных оболочек. *Вісн. НТУУ "КПІ". Машинобудування*. 2013. Вип. 67. С. 126–130.
6. Трубачев С.І., Колодежний В.А. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану гибів трубопроводів. *Молодий вчений*. 2018. № 1. С. 443–445. URL: http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2018/1/102.pdf
7. Трубачев С.І., Колодежний В.А., Петрик В.О., Сіренко А.П. Чисельне моделювання поля напружень в циліндрі з отворами. *Молодий вчений*. 2019. № 2. С. 236–239. DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2019-2-66-52

References:

1. Chemerys, O.M., Kolodezhnyi, V.A., & Trubachev, S.I. (2017). *Budivelna mekhanika mashyn* [Construction machinery mechanics]. Kyiv: National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky». URL: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18961 (in Ukrainian)
2. Volmir, A.S. (1967). *Ustojchivost deformiruemyh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka. (in Russian)
3. Amiro, I.Ya., Zaruckij, V.A., & Polakov, P.S. (1973). *Rebristye cilindricheskie obolochki* [Ribbed cylindrical shells]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
4. Norri, D., & Frid, Zh. (1981). *Vvedenie v metod konechnyh ehlementov* [Introduction to the finite element method]. Moscow: Mir. (in Russian)
5. Yahno, B.O., & Trubachev, S.I. (2013). Napryazheno-deformirovannoe sostoyanie cilindricheskih tolstostennyh perforirovannyh obolochek [The stress-strain state of cylindrical thick-walled perforated shells]. *Journal of mechanical engineering of the National technical university of Ukraine «Kyiv polytechnic institute»*, no. 67, pp. 126–130.
6. Trubachev, S.I., & Kolodezhnyi, V.A. (2018). Chyselne modeliuvannia napruzheno-deformovanoho stanu hybiv truboprovodiv [Numerical simulation of the stress-strain state of pipelines]. *Molodyi vchenyi*, no. 1, pp. 443–445. URL: http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2018/1/102.pdf
7. Trubachev, S.I., Kolodezhnyj, V.A., Petryk, V.O., & Sirenko, A.P. (2019). Chyselne mode-lyuvannya polya napruzhen v cylindri z otvoramy [Numerical simulation of the stress field in a cylinder with holes]. *Molodyi vchenyi*, no. 2, pp. 236–239. DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2019-2-66-52