

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

DOI: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-4-80-45>

УДК 519.859

Селезньова Н.П.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Селезньова Н.В.

фрілансер

РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ В СЕРЕДИНІ КРУГА, СЕКТОРА, КІЛЬЦЯ ТА ГОСТРОГО КУТА

Анотація. Запропоновані алгоритми розміщення прямокутників є необхідними при підготовці топологічних даних для приладів, що виготовляють фотошаблони. Області, обмежені гострим кутом, сектором, кільцем розбиваються на прямокутники так щоб вони повністю покрили цю область, також вони мають повністю міститись в середині заданої області. При цьому допускається перетин прямокутників. Алгоритми дають можливість створити вхідну інформацію у вигляді послідовності координат вершин кожного прямокутника, оптимальним чином вписаного у задану область, так щоб в результаті не було дірок. Запропоновані алгоритми дають фактично точний розв'язок. Інформація про початковий об'єкт задається в дискретному вигляді у вигляді координат вузлових точок. Запропоновані алгоритми суттєво відрізняються від алгоритмів описаних в інших роботах. Вони є значно простішими та більш точними, бо спираються на елементарні, добре відомі з аналітичної геометрії формули.

Ключові слова: фотошаблон, інтегральна схема, алгоритм вписування прямокутників у задану область.

Seleznova Nadiia

National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

Seleznova Nina

Freelance

LAYOUT OF RECTANGLES WITHIN A CIRCLE, SECTOR, RING AND SHARP CORNER

Summary. The aim of the article is to construct algorithms of coverage by rectangles with overlapping and without gaps of such areas as the sharp corner, sector and ring. The proposed algorithms for placing rectangles are necessary when preparing topological data for the devices that produce photo templates. The areas bounded by an acute angle, sector, or ring are divided into rectangles so that they fully cover this area, while being completely inside the specified area. The intersection of the rectangles is allowed. The task of forming images on photographic templates from set elements is used in the manufacture of integrated circuits, microelectronic devices. A set element is a rectangle. In order to create an image of topological structures, it is preliminary necessary to decompose such a structure into rectangles, the union of which coincides with the given accuracy with the description of the original structures and forms a coverage. The algorithms allow you to create incoming information in the form of a sequence of coordinates of the vertices of each rectangle, optimally inscribed in a given area so that there are no holes in the result. The offered algorithms give actually the exact decision. Information about the initial object is specified in discrete form in the form of node point coordinates. The proposed algorithms differ significantly from the algorithms described in other works. They are much simpler and more precise because they are based on elementary formulas well known from analytic geometry. Creating a control program to generate an image allows you to get a set of rectangles that fit into a given area with great accuracy. The proposed algorithms create initial topological information for phototypesetters, which are used in the process cycle of manufacturing integrated circuits. Actuality of work follows from that problems of coverage are widely applied at the solution of different classes of problems, in particular, cutting-pack problems belonging to optimization geometrical modeling and consisting in optimization of geometrical objects distribution in the given areas. The coverage tasks are also widely used in photolithography, which takes an important place in the manufacture of integrated circuits for microelectronics. Photolithography is impossible without the use of photographic templates, and to form a pattern there is a need to create elements of any configuration.

Keywords: photo template, integrated circuit, algorithm for placing rectangles in a given area.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. У широко відомій літературі представлено тільки один алгоритм покриття гострого кута прямокутниками з перекриттям та без просвітів за допомогою діаграм Вороного [1]. У запропонованій роботі представлено інший більш оптимальний та точний алгоритм покриття

гострого кута прямокутниками. Також у доступній літературі практично відсутні алгоритми покриття прямокутниками з перекриттям та без просвітів таких областей як сектор або кільце. Алгоритм такого покриття запропоновано авторами.

Мета статті. Метою статті є побудова алгоритмів покриття прямокутниками з перекрит-

тям та без просвітів таких областей як гострий кут, сектор та кільце.

Актуальність дослідження. При виробництві мікроелектронних пристроїв, наприклад інтегральних схем, фотоелектричних перетворювачів виникає потреба у формуванні топологічних структур на фотошаблоні. Ці структури формуються за допомогою спеціальних генераторів зображень, які в свою чергу, створюють топологію на фотошаблоні із набірних елементів. Набірним елементом є прямокутник. Створення зображень топологічних структур за допомогою таких генераторів базується на попередньому розкладі (декомпозиції) цих структур на оптимальну кількість прямокутників, об'єднання яких і формує з певною точністю покриття [1].

Задачі покриття широко застосовуються при розв'язуванні різних класів задач, зокрема, задачі розкрою-упаковки, які належать до оптимізаційного геометричного моделювання і полягають в оптимізації розміщення геометричних об'єктів в заданих областях. До класів задач геометричного проектування відносять задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів, які виникають при компонуванні радіоелектронних плат, ескізного проектуванні технічних систем. Також широке застосування алгоритмів задач покриття має місце в растрових фотоплоттерах у поліграфії. Для сучасного виробництва друкованих плат є актуальним растровий метод засвітки. В цьому методі малюнок формується елементарною плямою сфокусованого джерела світла. Розмір плями є однією із самих важливих характеристик растрових фотоплоттерів, яку називають роздільною здатністю фотоплоттера. Також задачі покриття мають широке застосування у фотолітографії, яка займає важливе місце у виготовленні інтегральних схем для мікроелектроніки. Фотолітографія неможлива без використання фотошаблонів, а для формування малюнку виникає необхідність створення елементів будь-якої конфігурації

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Одним із перших досліджень задач оптимального покриття було проведено російським вченим Є.С. Федоровим в кристаллографії та опубліковане у 1885 році. Надалі подібні задачі розв'язували методами лінійного програмування, комбінаторної геометрії. Пізніше в [2] представлено способи розв'язування ряду задач нерегулярного розміщення геометричних об'єктів в заданих областях за допомогою ЕВМ. Задача максимального покриття була представлена у 2002 році Е. Заком [3]. Мухачева А.С. запропонувала в 2004 році евристичні підходи до розв'язування задач максимального покриття [4].

В роботі [1] розглянуто проблему покриття багатокутників прямокутниками за допомогою алгоритму, заснованого на використанні діаграми Вороного, який покриває багатокутник без дірок із гострими внутрішніми кутами. На відміну від цієї роботи, запропонований у нашій роботі алгоритм покриття прямокутниками гострого кута є більш простим та більш точним. Покриття криволінійних областей прямокутниками практично не описано у відомій нам літературі. В роботі [5] багатокутник задається скінченною множиною точок площини, які йому належать і містяться у вузлах решітки, що накладається на багатокут-

ник. Завдяки тому, що кожна вершина багатокутника задана парою декартових координат, перед тим визначивши розміри клітинок решітки, обчислюються декартові координати усіх вузлових точок багатокутника. Виходячи з цього, далі обчислюються координати вершин прямокутників, що покривають багатокутник. Отже, задача зводиться до задачі перебору, що є досить громіздкою в реалізації. Такий алгоритм складно застосувати до задач покриття з криволінійною областю, а для гострого кута необхідно створити окремий алгоритм, що і зроблено в цій роботі.

Постановка задачі. Складність задач оптимального розміщення геометричних об'єктів потребує для свого розв'язування розробки спеціальних математичних методів і алгоритмів. Задачі покриття фігур, що містять гострі кути загалом досі мало описані в літературі [1; 5].

У представленій роботі опишемо спосіб вписування прямокутників у гострий кут. Запропонований алгоритм суттєво відрізняється від алгоритмів запропонованих в [1; 5].

В нашій задачі гострий кут необхідно розбити на прямокутники таким чином, щоб вони повністю покривали дану область і при цьому сторона прямокутника не може бути меншою за попередньо задану величину E_2 (цю величину називають роздільною здатністю установки, що створює, наприклад, фотошаблон). При цьому допускається перетин прямокутників. При такій постановці задачі є суттєві труднощі в побудові цільової функції, адже за цільову функцію приймають коефіцієнт заповнення даної області. Але тому, що допускається перетин прямокутників, то коефіцієнт заповнення даної області губить зміст. Отже, пропонуємо наступний спосіб покриття гострого кута прямокутниками з перетинними боками цільової функції.

Також опишемо спосіб уписування прямокутників у криволінійну область, обмежену дугами кіл та кутом.

Алгоритм вписування прямокутників у гострий кут

Нехай задана прямокутна декартова система координат на площині XOY , і нехай в цій системі задано гострий кут, координатами трьох точок: його вершини та двох точок, що належать різним сторонам кута. Позначимо ці точки та їх координати так: $L(C, D)$, $K(A, B)$, $M(E, F)$ (рис. 1).

Введемо до розгляду прямокутну декартову систему координат $X'O'Y'$. (рис. 1). Вісь $O'X'$ співпадає зі стороною заданого кута KM . Нехай система координат $X'O'Y'$ має ту саму орієнтацію, що і система координат XOY . Із курсу аналітичної геометрії відомо, що точки L, K, M в системі координат $X'O'Y'$ матимуть такі координати:

$$A1 = 0; B1 = 0; F1 = 0;$$

$$C1 = (C - A) \cdot \cos \varphi + (D - B) \cdot \sin \varphi;$$

$$D1 = -(C - A) \cdot \sin \varphi + (D - B) \cdot \cos \varphi;$$

$$E1 = (E - A) \cdot \cos \varphi + (F - B) \cdot \sin \varphi,$$

де φ – кут повороту системи координат $X'O'Y'$ відносно системи координат XOY .

Всередині гострого кута необхідно розмістити прямокутники так, щоб вони повністю покривали площу внутрішньої частини цього кута. При цьому допускаються перетини прямокутників.

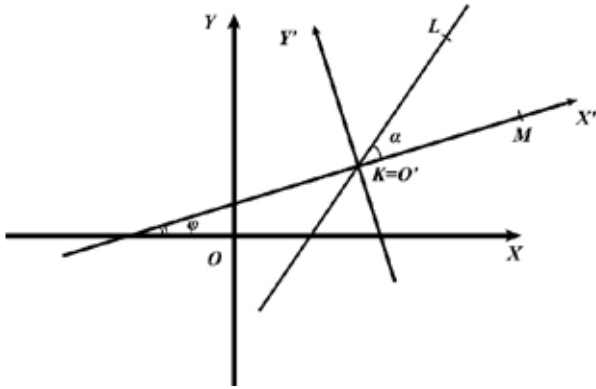


Рис. 1.

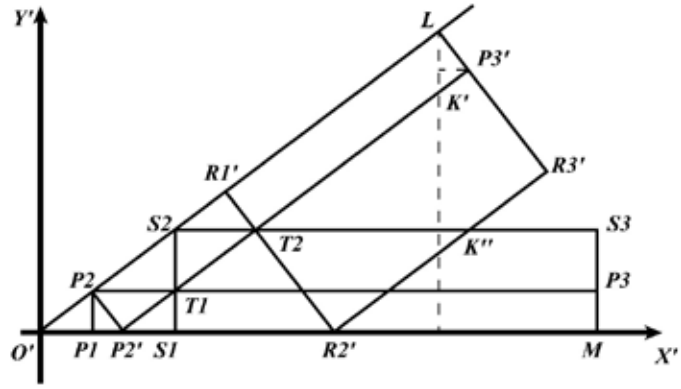


Рис. 2.

Розбиваємо кут LKM на прямокутники I та II роду так, як показано на рис. 2. Зауважимо, що система координат $X'OY'$ вибрана так, що $K = O'$. Тоді точка $M \in OX'$.

Прямокутниками I роду назвемо прямокутники, одна сторона яких лежить на осі OX' , прямокутниками II роду – ті, одна сторона яких лежить на стороні кута KL .

Кут LKM позначимо через α . Завдяки тому, що сторона прямокутника не має бути меншою за E_2 , маємо: $P_1P_2 = E_2$; $O'P_1 = E_2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; $P_1M = E_1 - O'P_1$. Звідси впливає побудова першого прямокутника I роду. Після цього будуємо перший прямокутник II роду: із точки P_2 проводимо перпендикуляр до $O'L$. Від точки L відкладаємо на ньому відрізок рівний P_2P_2' і отримуємо точку P_3' . Сполучаючи точки P_2' і P_3' , отримуємо перший прямокутник II роду $P_2P_2'P_3'L$. T_1 є точка перетину $P_2'P_3'$ з P_2P_3 . Через точку T_1 проводимо перпендикуляр до $O'M$ до перетину з $O'L$. З точки M проводимо перпендикуляр до $O'M$. Від точки M відкладаємо на ньому відрізок рівний S_1S_2 , так отримуємо точку S_3 . Сполучивши точки S_2 і S_3 прямою, отримуємо другий прямокутник першого роду $S_1S_2S_3M$. T_2 є точкою перетину S_2S_3 з $P_2'P_3'$. Через точку T_2 проведемо пряму, паралельну P_2P_2' . R_1', R_2' є точки перетину цієї прямої з $O'L$ і $O'M$, відповідно. Із точки L проведемо перпендикуляр до $O'L$, і від точки L відкладаємо на ньому відрізок рівний $R_1'R_2'$. В результаті отримуємо точку R_3' . Сполучивши відрізком прямої точки R_2' та R_3' , отримуємо другий прямокутник II роду $R_1'R_2'R_3'L$. Цю побудову продовжимо до тих пір, поки точка $T(I)$ не буде лежати на одному із перпендикулярів проведених через точки L або M до сторін кута α .

Із побудови прямокутників I та II роду випливає, що координати вершин першого прямокутника в системі координат $X'OY'$ знаходимо із наступних формул:

$$\begin{aligned} X_{11}(I) &= E_2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha; & Y_{11}(I) &= 0; & X_{21}(I) &= X_{11}(I); \\ Y_{21}(I) &= E_2; & X_{31}(I) &= E_1; & Y_{31}(I) &= E_2; \\ X_{41}(I) &= E_1; & Y_{41}(I) &= 0. \end{aligned}$$

Координати вершин другого прямокутника першого роду знаходимо із прямокутних трикутників $P_1P_2P_2'$; $P_2P_2'T_1$; $P_2T_1S_2$. Продовжуючи далі процес розміщення прямокутників всередині гострого кута, із трикутників подібних трикутникам $P_1P_2P_2'$; $P_2P_2'T_1$; $P_2T_1S_2$. Для $I = 2, 3, 4, \dots$ маємо:

$$\begin{aligned} X_{11}(I) &= 2 \cdot X_{11}(I-1) + Y_{21}(I-1) \cdot \operatorname{tg}\alpha; \\ Y_{11}(I) &= 0; & X_{21}(I) &= X_{11}(I); & Y_{21}(I) &= X_{21}(I) \cdot \operatorname{tg}\alpha; \\ X_{31}(I) &= E_1; & Y_{31}(I) &= Y_{21}(I); & X_{41}(I) &= E_1; & Y_{41}(I) &= 0. \end{aligned}$$

Застосовуючи формули перетворення координат

$$\begin{aligned} X &= X' \cdot \cos \varphi - Y' \cdot \sin \varphi + A; \\ Y &= X' \cdot \sin \varphi + Y' \cdot \cos \varphi + B \end{aligned} \quad (1)$$

до координат вершин, отриманих прямокутників, отримуємо координати вершин прямокутників I-го роду в системі координат XOY .

Із прямокутних трикутників $P_1P_2P_2'$; $K'P_3'L$ отримуємо координати вершин першого прямокутника другого роду.

$$\begin{aligned} Z_{11}(I) &= E_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha; & Q_{11}(I) &= E_2; \\ Z_{21}(I) &= Z_{11}(I) + Q_{11}(I) \cdot \operatorname{tg}\alpha; & Q_{21}(I) &= 0; \\ Z_{31}(I) &= C_1 + Q_{11}(I) \cdot \operatorname{tg}\alpha; & Q_{31}(I) &= D_1 - Q_{11}(I); \\ Z_{41}(I) &= C_1; & Q_{41}(I) &= D_1. \end{aligned}$$

Використовуючи знайдені значення координат вершин прямокутників I роду, а також із трикутників, подібних прямокутним трикутникам $S_2R_1'T_2$; $LK''S_3$, знаходимо координати вершин прямокутників II роду. Для $J = 2, 3, \dots$ маємо:

$$\begin{aligned} Z_{11}(J) &= (X_{11}(J) - X_{11}(J-1)) \cdot \cos^2 \alpha + X_{11}(J); \\ Q_{11}(J) &= Z_{11}(J) \cdot \operatorname{tg}\alpha; & Q_{21}(J) &= 0; \\ Z_{21}(J) &= Z_{11}(J) + Q_{11}(J) \cdot \operatorname{tg}\alpha; \\ Z_{31}(J) &= C_1 + Q_{11}(J) \cdot \operatorname{tg}\alpha; & Q_{31}(J) &= D_1 - Q_{11}(J); \\ Z_{41}(J) &= C_1; & Q_{41}(J) &= D_1. \end{aligned}$$

Застосовуючи до них формули (1), отримуємо координати вершин прямокутників II роду в системі координат XOY .

Алгоритм розміщення прямокутників в середині круга, сектора, кільця

Нехай задано фігуру, обмежену кільцем та кутом. Не обмежуючи загальності, можна розглядати цю фігуру в системі координат $X'OY'$. Нехай кут L_0M задано координатами трьох точок в системі координат XOY : $L(C; D)$, $O'(A; B)$, $S(E; F)$. Кут L_0M позначимо через α . (рис. 3).

Радіус меншого кола $O'P$ позначимо через T_1 , радіус більшого кола $O'S$ через R_1 . Розіб'ємо кут L_0M на частини так, щоб відрізок дотичної RP до дуги кола P_1P задовольняв умові: $RP \geq EPS$, де EPS , наперед задана стала. Тоді кут α розіб'ється на N_1 цілих рівних між собою частин n , можливо залишиться ще частина цього кута, яка в це розбиття не ввійде. Представимо це на рис. 4.

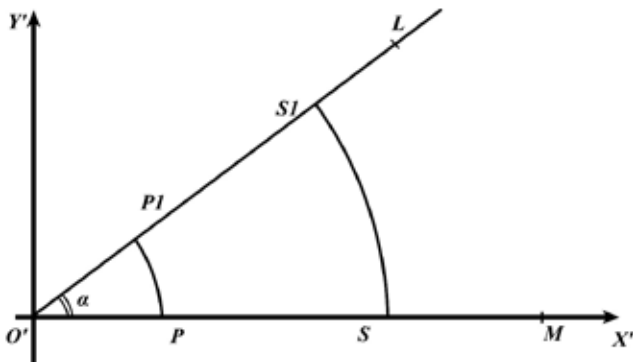


Рис. 3.

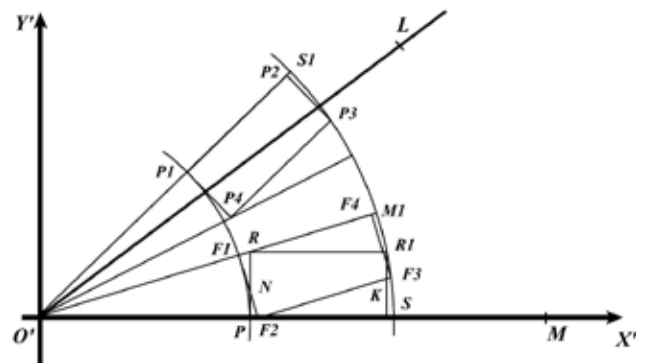


Рис. 4.

Число N_1 обчислимо за такою формулою:

$$N_1 = \left[\frac{\alpha \sqrt{1 + \frac{EPS^2}{T_1^2}}}{\arcsin \frac{EPS}{T_1}} \right]$$

Із рис. 4 видно, що $\angle M_1O'M = \frac{\alpha}{N_1}$. У фігуру, обмежену кутом $M_1O'M$ і дугами кіл радіусів RA та T_1 , впишемо два прямокутники, як показано на рис. 4. Тоді F_1F_2 , PR є дотичними до дуги кола радіусу T_1 в точках F_1 та P .

Прямокутник PRR_1S назовемо прямокутником першого роду а координати його вершин в системі координат $X'O'Y'$ позначимо як

$$(XA_1; YA_1); (XO_1; YO_1); (XI_1; YI_1); (XE_1; YE_1).$$

Прямокутник $F_1; F_2; F_3; F_4$ назовемо прямокутником II роду , а координати його вершин позначимо так:

$$F_1(ZA_1; QA_1); F_2(ZO_1; QO_1);$$

$$F_3(ZI_1; QI_1); F_4(ZE_1; QE_1)$$

в системі координат $X'O'Y'$. Координати вершин прямокутників I та II роду знайдемо за такими формулами:

$$XA_1 = T_1; YA_1 = 0; XO_1 = T_1; YO_1 = T_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{N_1};$$

$$XI_1 = \sqrt{RA^2 - T_1^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{N_1}}; YI_1 = T_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{N_1};$$

$$XE_1 = XI_1; YE_1 = 0;$$

$$ZA_1 = T_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1}; ZO_1 = \frac{T_1}{\cos \frac{\alpha}{N_1}}; QA_1 = T_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1}; QO_1 = 0; \tag{2}$$

$$ZI_1 = (\sqrt{RA^2 - T_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{N_1}} - T_1) \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1} + \frac{T_1}{\cos \frac{\alpha}{N_1}}; QI_1 = (\sqrt{RA^2 - T_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{N_1}} - T_1) \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1};$$

$$ZE_1 = (\sqrt{RA^2 - T_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{N_1}}) \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1}; QE_1 = (\sqrt{RA^2 - T_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{N_1}}) \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1}.$$

Якщо послідовно кожен раз повертати прямокутники I та II роду на кут рівний $\frac{\alpha}{N_1}$ доти, поки не вичерпаються всі N_1 , то отримаємо пер-

ше розміщення прямокутників всередині даної фігури. Координати вершин цих прямокутників отримаємо, застосовуючи до (2) наступні формули повороту (3) на кут $\frac{\alpha}{N_1}$.

$$\begin{aligned} X_{AN_1} &= XA_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1} + YA_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1}; & Y_{AN_1} &= -XA_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1} + YA_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1}; \\ X_{ON_1} &= XO_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1} + YO_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1}; & Y_{ON_1} &= -XO_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1} + YO_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1}; \\ X_{IN_1} &= XI_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1} + YI_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1}; & Y_{IN_1} &= -XI_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1} + YI_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1}; \\ X_{EN_1} &= XE_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1} + YE_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1}; & Y_{EN_1} &= -XE_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{N_1} + YE_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{N_1}. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу того, що цим процесом ми можемо не вичерпати весь кут α , то будемо додатковий прямокутник II роду $P_1; P_2; P_3; P_4$, як показано на рис. 4. Координати його вершин знайдемо за наступними формулами в системі коорди-

нат XOY . Кут R є кутом повороту системи координат $X'O'Y'$ відносно системи координат XOY .

$$X_1 = T_1 \cos(\alpha - R) + A; Y_1 = T_1 \sin(\alpha + R) + B;$$

$$X_2 = ZON; Y_2 = QON; X_3 = ZIN; Y_3 = QIN;$$

$$X4 = ZEN11 \cos R + QEN11 \sin R + A; \quad Y4 = -ZEN11 \sin R + QEN11 \cos R + B,$$

$$\text{де } ZEN11 = \cos \alpha \cdot \sqrt{RA^2 - T1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{N1}}; \quad QEN11 = \sin \alpha \cdot \sqrt{RA^2 - T1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{N1}}.$$

Прямокутники I роду конгруентні прямокутникам II роду. Довжина сторони першого прямокутника I роду $RR1$ обчислюється за такою формулою:

$$RR1 = \sqrt{RA^2 - T1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{N1}} - T1.$$

Процес розміщення прямокутників у даній області припиняється, якщо $RR1 < EPS$. У випадку, якщо ця умова не виконується, то величині $T1$ присвоюється інше значення:

$$T1 := \frac{T1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2N1}} + T1,$$

яке дорівнює відстані від точки O до точки K мінус EPS (рис. 4).

Після цього розміщуємо прямокутники таким же чином, як і раніше у фігурі, обмеженій тим же кутом і дугами кіл радіусів RA і новим значенням $T1$. Якщо при цьому виявиться, що

$$XK1 = 0; \quad YK1 = 0; \quad XK2 = 0; \quad YK2 = 3 \cdot EPS;$$

$$XK3 = \sqrt{RA^2 - EPS^2}; \quad YK3 = 3 \cdot EPS; \quad XK4 = XK3; \quad YK4 = 0;$$

$$ZK1 = XK1 \cdot \cos(2\pi - \alpha) + YK1 \cdot \sin(2\pi - \alpha); \quad QK1 = -XK1 \cdot \sin(2\pi - \alpha) + YK1 \cdot \cos(2\pi - \alpha);$$

$$ZK2 = XK2 \cdot \cos(2\pi - \alpha) + YK2 \cdot \sin(2\pi - \alpha); \quad QK2 = -XK2 \cdot \sin(2\pi - \alpha) + YK2 \cdot \cos(2\pi - \alpha);$$

$$ZK3 = XK3 \cdot \cos(2\pi - \alpha) + YK3 \cdot \sin(2\pi - \alpha); \quad QK3 = -XK3 \cdot \sin(2\pi - \alpha) + YK3 \cdot \cos(2\pi - \alpha);$$

$$ZK4 = XK4 \cdot \cos(2\pi - \alpha) + YK4 \cdot \sin(2\pi - \alpha); \quad QK4 = -XK4 \cdot \sin(2\pi - \alpha) + YK4 \cdot \cos(2\pi - \alpha);$$

$$T1 = 3 \cdot EPS.$$

Після цього алгоритм продовжується за алгоритмом для фігури, обмеженої дугами двох кіл і сторонами заданого кута.

Якщо необхідно в крузі розмістити прямокутники, то спочатку вписуємо в цей круг квадрат. Координати його вершин в системі координат $X'O'Y'$ знаходимо із наступних формул:

$$XL1 = \frac{\sqrt{2}}{2} RA; \quad YL1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} RA;$$

$$XL2 = \frac{\sqrt{2}}{2} RA; \quad YL2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} RA;$$

$$XL3 = \frac{\sqrt{2}}{2} RA; \quad YL3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} RA;$$

$$XL4 = \frac{\sqrt{2}}{2} RA; \quad YL4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} RA;$$

$$T1 = \frac{\sqrt{2}}{2} RA - EPS.$$

Тепер алгоритм застосовується для фігур, обмежених колами з радіусами $T1$ і RA . В даному випадку $\alpha = 2\pi$.

Список літератури:

1. Воронов А.А. Метод покрытия прямоугольниками объектов топологии микросхем, основанный на использовании обобщенной диаграммы Вороного. *Искусственный интеллект*. 2009. № 3. С. 367–375.
2. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. Киев : Наук. думка, 1976. 247 с.
3. Zak E., Rennick C. Relationship between skiving stock and cutting stock problem. *The 16th Triennial Conf. of the Int. Federation of Operational Research Societies*. Edinburgh, UK, 2002. P. 27.

нове значення $T1 \geq RA$, то процес знаходження вершин прямокутників припиняється.

Якщо $T1 = 0$, то окремо розглядаємо випадки кола, сектора з гострим кутом і кутом $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Тупі кути, величина яких перевищує π даним алгоритмом не розглядається, адже їх можна розбити на гострі кути.

Для розв'язування таких задач можна кути, величина яких перевищує π , розбити на такі, величина яких не перевищує π , а потім послідовно застосувати запропонований алгоритм до цих кутів.

У випадку сектора з гострим кутом маємо: $T1 = EPS \cdot \operatorname{ctg} \alpha$; $N1 = 1$. Потім обчислення проводяться за описаним вище алгоритмом.

Якщо задано сектор з тупим кутом, меншим або рівним π , то спочатку будуюмо два прямокутники на сторонах кута, одна вершина кожного із них міститься у вершині тупого кута. Їх координати визначаються за такими формулами в системі координат $X'O'Y'$:

Висновки. Запропоновані способи вписування прямокутників у гострий кут з перекриттями та розміщення прямокутників в середині круга, сектора, кільця є досить простими у застосуванні і дозволяють легко реалізувати запропоновані алгоритми будь-якою комп'ютерною мовою, але при цьому ще необхідно обчислити кут α між прямими LK та MK та кут φ – кут повороту прямої MK так, щоб вона співпала з віссю OX при русі за годинниковою стрілкою. Описані алгоритми були реалізовані автором для автоматизації виготовлення фотошаблонів ІС на установці ЕМ-515Б. Актуальність цих алгоритмів є і зараз завдяки їх оптимальності. Їх легко реалізувати на сучасних установках. Створення керуючої програми для генерації зображення дозволяє отримати набір прямокутників, які з великою точністю вписуються у задану область. Запропоновані алгоритми створюють початкову топологічну інформацію для фотонабірних установок, що використовуються в технологічному циклі виготовлення інтегральних схем.

4. Мухачева А.С. Простые эвристики для решения двумерной задачи максимального покрытия. *Принятие решений в условиях неопределенности*. Уфа, 2004. С. 38–43.
5. Бутов А.А. Устранение избыточности в покрытии топологического объекта прямоугольниками. *Доклады БГУИР*. 2017. № 8(110). С. 13–20.

References:

1. Voronov, A.A. (2009). Metod pokrytiya pryamougol'nikami ob'ektov topologii mikroskhem, osnovannyu na ispol'zovanii obobshchennoy diagrammy Voronogo [Method of covering chip topology objects with rectangles based on Voronoy's generalized diagram]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence], no 3, pp. 367–375.
2. Stoyan, Yu.G., & Gil,' N.I. (1976). *Metody i algoritmy razmeshcheniya ploskikh geometricheskikh ob'ektov* [Methods and algorithms for arrangement of flat geometrical objects]. Kiev: Nauk. dumka, 247 p.
3. Zak, E., & Rennick, C. (2002). Relationship between skiving stock and cutting stock problem. *The 16th Triennial Conf. of the Int. Federation of Operational Research Societies*. Edinburgh, UK, p. 27.
4. Mukhacheva, A.S. (2004). Prostye evristiki dlya resheniya dvumernoy zadachi maksimal'nogo pokrytiya [Simple heuristic solutions for the two-dimensional maximum coverage problem]. *Prinyatie resheniy v usloviyakh neopredelennosti* [Decision-making in an uncertain environment]. Ufa, pp. 38–43.
5. Butov, A.A. (2017). Ustranenie izbytochnosti v pokrytii topologicheskogo ob'ekta pryamougol'nikami [Elimination of redundancy in the coverage of the topological object by rectangles]. *Doklady BGUIR*, no. 8(110), pp. 13–20.